Approche par bornes stochastiques et histogrammes pour l'analyse de performance des réseaux

Farah Ait Salaht *

Laboratoire PRiSM
Université de Versailles St-Quentin de Yvelines
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles
Farah.Ait-Salaht@prism.uvsq.fr

1. Introduction

Les mesures de performance des réseaux deviennent de plus en plus nombreuses et beaucoup de traces sont disponibles pour tester des hypothèses sur le trafic. Par contre, ces traces sont trop volumineuses pour servir directement à l'analyse de performances. De plus, la modélisation du trafic est généralement impossible à effectuer de façon suffisamment précise et l'adéquation avec une loi de probabilité connue n'est pas assez réaliste.

Reposant sur une description par histogramme des traces, nous proposons une nouvelle approche fondée sur la comparaison stochastique pour réduire la taille des distributions empiriques. Nous construisons grâce à un algorithme optimal, que nous avons prouvé [1], deux distributions discrètes plus petites (au sens de leurs supports) et qui sont des bornes stochastiques inférieures et supérieures de la distribution initiale. La théorie de la comparaison stochastique est alors utilisée pour obtenir des bornes de toute mesure de performance qui s'écrit comme une fonction croissante sur la distribution de probabilité (longueur de la file, pertes, etc.). Nous n'avons donc plus besoin du caractère exponentiel des interarrivées et des services qui sont souvent utilisés pour l'analyse des performances de réseaux. Par contre, l'hypothèse de stationnarité du trafic est ici nécessaire.

L'approche reposant sur des histogrammes pour l'évaluation de performance n'est pas nouvelle. La plupart des travaux récents sur le sujet traitent des processus HBSP (Histogram Based Stochastic Process) proposés par Hernández-Orallo et ses co-auteurs [2]. L'idée de base est de réduire la taille des histogrammes par une agrégation de taille constante et de les injecter dans des files FIFO simples pour calculer numériquement la distribution stationnaire de la longueur des files. Par contre, l'utilisation des bornes stochastiques dans ce contexte nous semble originale. D'autant plus qu'elles garantissent l'optimalité des mesures bornantes.

*. Ce travail a été réalisé avec J.M. Fourneau, H. Castel et N. Pekergin.

2. Borne stochastique

On considère un espace d'état $\mathcal{G} = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni d'un ordre total noté $\leq$. Soient X et Y deux variables aléatoires ayant $\mathcal{G}$ comme support et de distributions de probabilités $\boldsymbol{d}2$ et $\boldsymbol{d}1$ ($\boldsymbol{d}2[i]=\mathrm{Prob}(X = i)$, et $\boldsymbol{d}1[i]=\mathrm{Prob}(Y = i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$).

Definition 1 (Ordre Stochastique) *:*
- *Définition générale :* $X \leq_{st} Y \iff \mathbb{E}f(X) \leq \mathbb{E}f(Y)$ *pour toute fonction croissante* $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^+$ *pour peu que les espérances existent.*
- *Définition utilisant les distributions :*

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{k=i}^{n} \mathbf{d}2[k] \leq \sum_{k=i}^{n} \mathbf{d}1[k].$$

On utilisera de façon équivalente $X \leq_{st} Y$ *et* $\mathbf{d}2 \leq_{st} \mathbf{d}1$.

L'ordre $\leq_{st}$ nous intéresse particulièrement, car il permet de borner les récompenses croissantes, cette propriété est souvent vraie pour les récompenses utilisées en évaluation de performances : moyenne, moment d'ordre quelconque, etc.

3. Méthode de réduction de la taille d'une distribution en la bornant [1]

Nous cherchons à réduire la taille des distributions que nous allons employer pour modéliser le trafic et la capacité (débit) de service dans les éléments de réseau. Nous fournissons un encadrement au sens stochastique des résultats. Ces encadrements nous permettent de vérifier que les contraintes de Qualité de Service sont satisfaites.

Soit une distribution $\boldsymbol{d}$, définie par un histogramme à N classes (états), on construit deux distributions bornantes $\boldsymbol{d}1$ et $\boldsymbol{d}2$ qui sont définies par des histogrammes à $n < N$ classes. De plus, $\boldsymbol{d}1$ et $\boldsymbol{d}2$ sont les meilleures approximations de $\boldsymbol{d}$ au sens d'une fonction de récompense $\boldsymbol{r}$ fournie par le modélisateur. Nous avons présenté dans [1] un algorithme reposant sur la programmation dynamique pour calculer de telles distributions bornantes optimales. Pour être plus formel, pour une distribution $\boldsymbol{d}$ définie sur $\mathcal{H}$ ($|\mathcal{H}| = N$), nous calculons deux distributions $\boldsymbol{d}1$ et $\boldsymbol{d}2$ définies respectivement sur $\mathcal{H}^u$, $\mathcal{H}^l$ ($|\mathcal{H}^u| = n$, $|\mathcal{H}^l| = n$) telles que :

1. $\boldsymbol{d}2 \leq_{st} \boldsymbol{d} \leq_{st} \boldsymbol{d}1$,

2. $\sum_{i\in\mathcal{H}} \boldsymbol{r}[i]\boldsymbol{d}[i] - \sum_{i\in\mathcal{H}^l} \boldsymbol{r}[i]\boldsymbol{d}2[i]$ est minimale dans l'ensemble des distributions sur n états stochastiquement inférieure à $\boldsymbol{d}$,
3. $\sum_{i\in\mathcal{H}^u} \boldsymbol{r}[i]\boldsymbol{d}1[i] - \sum_{i\in\mathcal{H}} \boldsymbol{r}[i]\boldsymbol{d}[i]$ est minimale dans l'ensemble des distributions sur n états stochastiquement supérieure à $\boldsymbol{d}$,

Il est important de noter que les deux supports des distributions bornantes sont issus de $\mathcal{H}$ mais ne sont pas en général égaux. C'est l'algorithme qui fixe le support et la distribution. Les distributions $\boldsymbol{d}1$ et $\boldsymbol{d}2$ représentent les bornes optimales sur n états pour la récompense positive croissante $\boldsymbol{r}$.

4. Modèle d'une file FIFO

Soit $A(k)$ une variable aléatoire représentant le trafic entrant dans la file pendant le k-ième intervalle temporel (slot). Nous notons respectivement par $Q(k)$ et $D(k)$ la longueur du tampon et le nombre de sorties pendant ce même slot. Soit B la capacité du tampon et S la capacité de service. On se place dans un modèle où les arrivées ont lieu avant les services. Les services se terminent en fin d'intervalle temporel. Un paquet reste donc au minimum 1 slot dans la file. L'équation de récurrence sur la longueur du tampon dans ce modèle est bien connue [3] :

$$Q(k) = \mathtt{min}(B, (Q(k-1) + A(k) - S)^+), \qquad (1)$$

où $(X)^+ = \mathtt{max}(X, 0)$. On obtient également la distribution de sortie grâce à cette récurrence, pour tout k :

$$D(k) = \mathtt{min}(S, Q(k-1) + A(k)). \qquad (2)$$

L'équation 1 (resp. l'équation 2) définit une chaîne de Markov en temps discret si les arrivées sont indépendantes et le processus $A(k)$ est stationnaire.

4.1. Bornes sur la file liées aux bornes sur les histogrammes de trafic

Pour une file à capacité finie B, nous injectons les trafics bornants (inférieurs et supérieurs) et nous établissons un résultat de comparaison stochastique. Supposons que le trafic d'entrée soit $\tilde{A}(k)$, un processus d'arrivée qui borne supérieurement ou inférieurement le trafic réel, on note $\tilde{Q}(k)$ l'état de la chaîne de Markov associée à ce processus d'arrivée. On note $\tilde{D}(k)$ le nombre de sorties sous les mêmes hypothèses. Le théorème 4.3.9 de [4] permet d'établir les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Bornes supérieures) *Si* $A(k) \leq_{st} \tilde{A}(k), \forall k \geq 0$ *alors* $Q(k) \leq_{st} \tilde{Q}(k), \forall k \geq 0$

Proposition 2 (Bornes inférieures) *Si* $\tilde{A}(k) \leq_{st} A(k)$ *pour tout* $k \geq 0$*, alors* $\tilde{Q}(k) \leq_{st} Q(k)$ *pour tout* $k \geq 0$.

D'après l'équation 2, nous avons également des bornes sur le processus de sortie.

Proposition 3 *Si* $A(k) \leq_{st} \tilde{A}(k)$ *pour tout* $k \geq 0$*, alors* $D(k) \leq_{st} \tilde{D}(k)$, $\forall k \geq 0$. *De même, si* $\tilde{A}(k) \leq_{st} A(k)$ $\forall k \geq 0$*, alors,* $\tilde{D}(k) \leq_{st} D(k)$, $\forall k \geq 0$.

Et puisque ces propositions sont vraies pour toutes les dates k, elles sont également vraies pour les versions stationnaires qui existent lorsque les chaînes sont ergodiques.

5. Conclusion

Notre méthode de bornes stochastiques offre un compromis intéressant entre la précision et la vitesse de calcul. En effet, selon le choix de la réduction apporté à la taille des distributions, nous pouvons déterminer des bornes pertinentes et un encadrement très fin du résultat exact en des temps relativement courts. Nous montrons également que l'élément du réseau est stochastiquement monotone ce qui nous permet d'assurer que les distributions bornantes calculées représentent bien des bornes de la distribution exacte. Ainsi, en appliquant nos algorithmes de bornes sur l'histogramme représentant la trace de trafic en entrée, nous définissons des histogrammes bornants sur les différentes mesures de performance : les probabilités de blocage, l'espérance de la longueur du tampon, etc.

Bibliographie

1. F. Aït-Salaht, J. Cohen, H. Castel-Taleb, J.M. Fourneau et N. Pekergin. Accuracy vs. complexity : the stochastic bound approach. In 11th International Workshop on Discrete Event Systems, pages 343-348, 2012.
2. E. Hernández-Orallo and J. Vila-Carbó. Network queue and loss analysis using histogram based traffic models. Computer Communications, 33(2) :190-201, 2010.
3. L. Kleinrock. Queueing Systems, volume I : Theory. Wiley Interscience, 1975.
4. A. Müller and D. Stoyan. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks. Wiley, New York, NY, 2002.