Medidas Dinámicas de Riesgo en Juegos Markovianos con Costos Variables

Eugenio M. Della Vecchia   Fernando M. Vidal

Univ. Nacional de Rosario, Argentina

14 de diciembre de 2016

Contenido

Juegos Markovianos

- Sistema dinámico en tiempo discreto.
- Tiempos prefijados, 2 jugadores eligen acciones que dan lugar a
  - Ganancias instantáneas para cada uno de ellos.

Juegos Markovianos

- Sistema dinámico en tiempo discreto.
- Tiempos prefijados, 2 jugadores eligen acciones que dan lugar a
    - Ganancias instantáneas para cada uno de ellos.
        1. Suma Nula.
        2. Suma No Nula.

Juegos Markovianos

- Sistema dinámico en tiempo discreto.
- Tiempos prefijados, 2 jugadores eligen acciones que dan lugar a
  - Ganancias instantáneas para cada uno de ellos.
    1. Suma Nula.
    2. Suma No Nula.
  - Distribuciones de probabilidad de transición en el espacio de estados.
- Ganancias y distribuciones de probabilidad dependen sólo del estado actual y las acciones allí escogidas.

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados*.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones*. $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea.* $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento.*

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados*.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones*. $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea.* $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento.*

Historia hasta la n-ésima época,

$$h_n = (s_0, a_0, b_0, s_1, a_1, b_1, \ldots, , s_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1}, s_n).$$

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados*.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones*. $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea*. $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento*.

- Estrategia markoviana para el jugador 1: $\pi = \{f_n\}$, $f_n \in \mathbb{P}(\mathcal{A}|H_n)$,

$$f_n(a|h_n) = f_n(a|s_n) \ .$$

- Estrategia estacionaria: $\pi = \{f, f, ...\} = f$.

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados*.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones*. $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea*. $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento*.

- Estrategia markoviana para el jugador 2: $\gamma = \{g_n\}$, $g_n \in \mathbb{P}(\mathcal{B}|H_n)$,

$$g_n(b|h_n) = g_n(b|s_n) \ .$$

- Estrategia estacionaria: $\gamma = \{g, g, ...\} = g$.

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados*.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones*. $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea.* $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento.*

$\pi \in \Pi$, $\gamma \in \Gamma$ estrategias,

$$V_A{}^{\pi,\gamma}(s) = \mathbb{E}_s^{\pi,\gamma}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t \; r_A{}^{A_t,B_t}(S_t)\right] .$$

Elementos del Modelo **MG** bipersonales

$$G := (\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \{\mathcal{A}_s : s \in \mathcal{S}\}, \{\mathcal{B}_s : s \in \mathcal{S}\}, Q, \{r_A, r_B\}, \{\alpha_t\})$$

- $\mathcal{S}$, espacio de *estados.*
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ espacios de *acciones.* $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$.
- Q, *ley de transición* sobre $\mathcal{S}$. $Q^{a,b}(z|s)$.
- r_A, r_B, *funciones de ganancia instantánea.* $r^{a,b}(s)$
- α_t, *factores de descuento.*

$\pi \in \Pi$, $\gamma \in \Gamma$ estrategias,

$$V_B{}^{\pi,\gamma}(s) = \mathbb{E}_s^{\pi,\gamma}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t \; r_B{}^{A_t,B_t}(S_t)\right] \; .$$

Medidas Coherente de Riesgo

$$\begin{array}{lcll} Z & \to & \{10, 50, 90\} & \mu = 50 \\ Z & \to & \{20, 50, 80\} & \mu = 50 \\ Z & \to & \{55, 60, 65\} & \mu = 60 \\ Z & \to & \{0, 100, 200\} & \mu = 100 \end{array}$$

La media puede no ser adecuada.

Un minimizador averso al riesgo, puede utilizar

$$\mathbb{E}(Z) + \kappa \left[\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}(Z))^2\right]^{1/2}.$$

Medidas más generales que la esperanza condicional, que rescatan algunas propiedades.

Medidas Coherente de Riesgo

- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$, $\{\mathfrak{F}_t\}$ filtración de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}_t = L_p(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathrm{P})$.
- $\{\rho_t\}$, $\rho_t : \mathfrak{X}_{t+1} \to \mathfrak{X}_t$ medida coherente de riesgo
  - ρ_t convexa en $\mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(Z + W) = Z + \rho_t(W)$ si $Z \in \mathfrak{X}_t$, $W \in \mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(\lambda Z) = \lambda \; \rho_t(Z)$ si $Z \in \mathfrak{X}_{t+1}$, $\lambda \geqq 0$.

Medidas Coherente de Riesgo

- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$, $\{\mathfrak{F}_t\}$ filtración de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}_t = L_p(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathrm{P})$.
- $\{\rho_t\}$, $\rho_t : \mathfrak{X}_{t+1} \to \mathfrak{X}_t$ medida coherente de riesgo
  - ρ_t convexa en $\mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(Z + W) = Z + \rho_t(W)$ si $Z \in \mathfrak{X}_t$, $W \in \mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(\lambda Z) = \lambda\ \rho_t(Z)$ si $Z \in \mathfrak{X}_{t+1}$, $\lambda \geqq 0$.

Ejemplo

$$\rho_t(Z_{t+1}) = \mathbb{E}\left[Z_{t+1}|\mathfrak{F}_t\right] + \kappa\ \mathbb{E}\left[\left((Z_{t+1} - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathfrak{F}_t])\right)^2|\mathfrak{F}_t\right]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Medidas Coherente de Riesgo

- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$, $\{\mathfrak{F}_t\}$ filtración de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}_t = L_p(\Omega, \mathfrak{F}_t, \mathrm{P})$.
- $\{\rho_t\}$, $\rho_t : \mathfrak{X}_{t+1} \to \mathfrak{X}_t$ medida coherente de riesgo
  - ρ_t convexa en $\mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(Z + W) = Z + \rho_t(W)$ si $Z \in \mathfrak{X}_t$, $W \in \mathfrak{X}_{t+1}$
  - $\rho_t(\lambda Z) = \lambda\ \rho_t(Z)$ si $Z \in \mathfrak{X}_{t+1}$, $\lambda \geqq 0$.

Ejemplo

$$\rho_t(Z_{t+1}) = \mathbb{E}\left[Z_{t+1}|\mathfrak{F}_t\right] + \kappa\ \mathbb{E}\left[((Z_{t+1} - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathfrak{F}_t]))^2|\mathfrak{F}_t\right]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

- v función medible, $\sigma(v, s_t, Q)$ medida de transición de riesgo desde el estado s_t,
$$\rho_t(S_{t+1}) = \sigma(v, s_t, Q^{a_t, b_t}(\cdot|s_t)) \ .$$

Antecedentes

- 2010: A. Ruszczynski $\longrightarrow$ riesgo a **MDP**.
  Horizonte finito e infinito. Optimalidad y Aproximaciones.
- 2011, J. Bollati et al. $\longrightarrow$ riesgo a **MG** de suma nula.
  Horizonte finito e infinito. Optimalidad.
- 2013, E.DV. et al. $\longrightarrow$ riesgo a **MG** de suma nula.
  Horizonte finito e infinito. Aproximación y análisis de sensibilidad.

Antecedentes

- 2010: A. Ruszcynski $\longrightarrow$ riesgo a **MDP**.
  Horizonte finito e infinito. Optimalidad y Aproximaciones.
- 2011, J. Bollati et al. $\longrightarrow$ riesgo a **MG** de suma nula.
  Horizonte finito e infinito. Optimalidad.
- 2013, E.DV. et al. $\longrightarrow$ riesgo a **MG** de suma nula.
  Horizonte finito e infinito. Aproximación y análisis de sensibilidad.

Recorrer el mismo camino para Juegos Markovianos generales

Valores y Equilibrios

- Horizonte finito

$$
\begin{aligned}
{J_{A,N}}^{\pi,\gamma}(s) &= \rho_{A,0}\left({r_A}^{A_0,B_0}(S_0) + \rho_{A,1}\left(\alpha_1 {r_A}^{A_1,B_1}(S_1)\right.\right. \\
&\quad + \rho_{A,2}(\alpha_2 {r_A}^{A_2,B_2}(S_2) \;+\; \rho_{A,3}(\alpha_3 {r_A}^{A_3,B_3}(S_3) \\
&\quad \left.\left. + \ldots + \rho_{A,N-1}(\alpha_{N-1}\; {r_A}^{A_{N-1},B_{N-1}}(S_{N-1})))\right)\right)
\end{aligned}
$$

- Horizonte infinito

$$
\begin{aligned}
{J_A}^{\pi,\gamma}(s) &= \rho_{A,0}\left({r_A}^{A_0,B_0}(S_0) + \rho_{A,1}\left(\alpha_1 {r_A}^{A_1,B_1}(S_1)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \rho_{A,2}(\alpha_2 {r_A}^{A_2,B_2}(S_2) + \ldots)\right)\right) \;.
\end{aligned}
$$

Valores y Equilibrios

- Horizonte finito

$$
\begin{aligned}
{J_{B,N}}^{\pi,\gamma}(s) \quad = \quad & \rho_{B,0}\left(r_B{}^{A_0,B_0}(S_0) + \rho_{B,1}\left(\alpha_1 r_B{}^{A_1,B_1}(S_1)\right.\right. \\
& + \rho_{B,2}(\alpha_2 r_B{}^{A_2,B_2}(S_2) \ + \ \rho_{B,3}(\alpha_3 r_B{}^{A_3,B_3}(S_3) \\
& \left.\left. + \ldots + \rho_{B,N-1}(\alpha_{N-1} \ r_B{}^{A_{N-1},B_{N-1}}(S_{N-1})))\right)\right)
\end{aligned}
$$

- Horizonte infinito

$$
\begin{aligned}
{J_B}^{\pi,\gamma}(s) \quad = \quad & \rho_{B,0}\left(r_B{}^{A_0,B_0}(S_0) + \rho_{B,1}\left(\alpha_1 r_B{}^{A_1,B_1}(S_1)\right.\right. \\
& \left.\left. + \rho_{B,2}(\alpha_2 r_B{}^{A_2,B_2}(S_2) + \ldots)\right)\right) \ .
\end{aligned}
$$

Valores y Equilibrios

Dado s, un equilibrio (π^*, γ^*) verifica, conjuntamente,

$$(\pi^*, \gamma^*) \in \arg \max_{\pi} J_A^{\pi, \gamma^*}(s) \ ,$$

$$(\pi^*, \gamma^*) \in \arg \max_{\gamma} J_B^{\pi^*, \gamma}(s) \ .$$

Hipótesis General

(a) $\mathcal{S}$ *boreliano,* $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{B}_s$ *compactos;*

(b) r *acotada,* $r^{\cdot, b}(s)$ *semicontinua superior en* $\mathcal{A}_s$, $r^{a, \cdot}(s)$ *semicontinua superior en en* $\mathcal{B}_s$, *para cada* s *;*

(c) $(a, b) \mapsto Q^{a,b}(\cdot | s)$ *débil* * *continua.*

Programación Dinámica en Horizonte Finito

- $V_{A,0}$, $V_{A,1}$,...,$V_{A,N}$, $V_{B,0}$, $V_{B,1}$,...,$V_{B,N}$ funciones sobre $\mathcal{S}$

$$V_{A,N} = V_{B,N} = 0 \ ,$$

Programación Dinámica en Horizonte Finito

- $V_{A,0}$, $V_{A,1}$,...,$V_{A,N}$, $V_{B,0}$, $V_{B,1}$,...,$V_{B,N}$ funciones sobre $\mathcal{S}$

$$V_{A,N} = V_{B,N} = 0 \ ,$$

- para $n = N-1, ..., 0$, (f_n^*, g_n^*) equilibrio de Nash del juego de utilidades

$$u_A^{a,b}(s) = r_A^{a,b}(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \sigma_A(V_{A,n+1}, s, Q^{a,b}) \ ,$$

$$u_B^{a,b}(s) = r_B^{a,b}(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \sigma_B(V_{B,n+1}, s, Q^{a,b}) \ .$$

Programación Dinámica en Horizonte Finito

- $V_{A,0}$, $V_{A,1}$,...,$V_{A,N}$, $V_{B,0}$, $V_{B,1}$,...,$V_{B,N}$ funciones sobre $\mathcal{S}$

$$V_{A,N} = V_{B,N} = 0 \ ,$$

- para $n = N-1, ..., 0$, (f_n^*, g_n^*) equilibrio de Nash del juego de utilidades

$$u_A^{a,b}(s) = r_A^{a,b}(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \sigma_A(V_{A,n+1}, s, Q^{a,b}) \ ,$$

$$u_B^{a,b}(s) = r_B^{a,b}(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \sigma_B(V_{B,n+1}, s, Q^{a,b}) \ .$$

$$V_{A,n} = J_A^{f_n^*, g_n^*} \ , \quad V_{B,n} = J_B^{f_n^*, g_n^*} \ .$$

- El par (π^*, γ^*) formado por

$$\pi^* = \{f_0^*, f_1^*, ..., f_{N-1}^*\} \ , \quad \gamma^* = \{g_0^*, g_1^*, ..., g_{N-1}^*\}$$

  es equilibrio de Nash del juego de horizonte N.

Horizonte Infinito. Modelo Aumentado

Hipótesis General

(a) $|r^a_{A,B}(s)| \leqq M_{A,B}$.

(b) $\alpha_t \ \leqq \ \beta \ \alpha_{t-1}, \ \beta < 1$.

Horizonte Infinito. Modelo Aumentado

Hipótesis General

(a) $|r^a_{A,B}(s)| \leqq M_{A,B}$.

(b) $\alpha_t \ \leqq \ \beta \ \alpha_{t-1}, \ \beta < 1$.

$$\tilde{\mathcal{M}} := (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{A}}, \{\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{s}} : \tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}\}, \tilde{Q}, \tilde{r}_A, \tilde{r}_B, \{\tilde{\alpha}_{\tilde{s}}, \tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}\})$$

- $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \times \mathbb{N}_0$
- $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{(s,\tau)} = \mathcal{A}_s$.
- $\tilde{r}^a_{A,B}(s,\tau) = r^a_{A,B}(s)$.
- $\tilde{Q}^a(z,\tau'|s,\tau) = \begin{cases} Q^a(z|s) & \text{if } \ \tau' = \tau + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $\tilde{\alpha}_{(s,\tau)} = \alpha_\tau$.

Modelo Aumentado

- $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Pi}_{\mathrm{stat}}$, $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_{\mathrm{stat}}$.
- Correspondencia 1-1 correspondence estrategias estacionarias en $\tilde{\mathcal{M}}$ y Markov en $\mathcal{M}$.

Modelo Aumentado

- $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Pi}_{\text{stat}}$, $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_{\text{stat}}$.
- Correspondencia 1-1 correspondence estrategias estacionarias en $\tilde{\mathcal{M}}$ y Markov en $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\tilde{J_A}^{\tilde{\pi},\tilde{\gamma}}(s,\tau) \quad := \quad & \frac{1}{\tilde{\alpha}_{\tau-1}}\rho_{A,\tau}\Big(\tilde{\alpha}_\tau \tilde{r}_A{}^{A_\tau,B_\tau}(S_\tau) \\ & + \rho_{A_{\tau+1}}\Big(\tilde{\alpha}_{\tau+1}\tilde{r}_A{}^{A_{\tau+1},B_{\tau+1}}(S_{\tau+1})\cdots\Big)\Big)\end{aligned}$$

- Funciones de Valor y Estrategias de Equilibrio.
- $\tilde{J}^*_{A/B}(s,\tau)$ valor esperado desde tiempo τ, en el estado s.
- $\tilde{J}^*_{A/B}(s,0) = J^*_{A/B}(s)$.

Modelo Aumentado

- $\tilde{\Pi}$, $\tilde{\Pi}_{\text{stat}}$, $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_{\text{stat}}$.
- Correspondencia 1-1 correspondence estrategias estacionarias en $\tilde{\mathcal{M}}$ y Markov en $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\tilde{J_B}^{\tilde{\pi},\tilde{\gamma}}(s,\tau) \quad := \quad & \frac{1}{\tilde{\alpha}_{\tau-1}} \rho_{B,\tau} \Big(\tilde{\alpha}_{\tau} \tilde{r}_B{}^{A_\tau, B_\tau}(S_\tau) \\ & + \rho_{B_{\tau+1}} \Big(\tilde{\alpha}_{\tau+1} \tilde{r}_B{}^{A_{\tau+1}, B_{\tau+1}}(S_{\tau+1}) \cdots \Big) \Big)\end{aligned}$$

- Funciones de Valor y Estrategias de Equilibrio.
- $\tilde{J}^*_{A/B}(s,\tau)$ valor esperado desde tiempo τ, en el estado s.
- $\tilde{J}^*_{A/B}(s,0) = J^*_{A/B}(s)$.

Resultados de Optimalidad

- $f : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, $g : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{B}}$,

$$(T^g w)(s,\tau) = \sup_{\mu \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}_{(s,\tau)}}} \left\{ \tilde{r}_A{}^{\mu,g}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_A(w,(s,\tau),\tilde{Q}^{\mu,g}) \right\}$$

$$(T^f w)(s,\tau) = \sup_{\xi \in \mathbb{P}_{\mathcal{B}_{(s,\tau)}}} \left\{ \tilde{r}_B{}^{f,\xi}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_B(w,(s,\tau),\tilde{Q}^{f,\xi}) \right\}$$

contractivas en $B(\mathcal{S})$. w^g y w^f puntos fijos.

- $G : \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \times \mathbb{P}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \times \mathbb{P}_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} G(f,g) \quad = \quad \Big\{ (f',g') :\ & w^g(s,\tau) = \tilde{r}_A^{f',g}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_A(w^g,(s,\tau),\tilde{Q}^{f',g}), \\ & w^f(s,\tau) = \tilde{r}_B^{f,g'}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_B(w^f,(s,\tau),\tilde{Q}^{f,g}) \Big\}. \end{aligned}$$

es una multiunción no vacía, cerrada y convexa.

Resultados de Optimalidad

- $G : \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \times \mathbb{P}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \times \mathbb{P}_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} G(f,g) \quad = \quad \Big\{ (f',g') : \; & w^g(s,\tau) = \tilde{r}_A^{f',g}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_A(w^g,(s,\tau),\tilde{Q}^{f',g}), \\ & w^f(s,\tau) = \tilde{r}_B^{f,g'}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}} \, \sigma_B(w^f,(s,\tau),\tilde{Q}^{f,g}) \Big\} . \end{aligned}$$

es una multiunción no vacía, cerrada y convexa.

$$\left. \begin{array}{c} (\mu_{n+1},\xi_{n+1}) \in G(f_n,g_n) \\ (\mu_{n+1},\xi_{n+1}) \to (\mu^*,\xi^*) \\ (f_n,g_n) \to (f^*,g^*) \end{array} \right\} \Longrightarrow \; (\mu^*,\xi^*) \in G(f^*,g^*) \; .$$

Resultados de Optimalidad

- Teorema de Punto Fijo de Kakutani, existe (f^*, g^*) tal que $(f^*, g^*) \in G(f^*, g^*)$,

$$
\begin{aligned}
G(f,g) \quad = \quad \Big\{ (f',g') :\ & w^g(s,\tau) = r_A^{f',g}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_A(w^g, (s,\tau), \tilde{Q}^{f',g}), \\
& w^f(s,\tau) = r_B^{f,g'}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_B(w^f, (s,\tau), \tilde{Q}^{f,g}) \Big\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w^{g^*}(s,\tau) \quad &= \quad r_A^{f^*,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_A(w^{g^*}, (s,\tau), \tilde{Q}^{f^*,g^*}) \\
&= \quad \sup_{\mu \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}_{(s,\tau)}}} \left\{ r_A^{\mu,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_A(w, (s,\tau), \tilde{Q}^{\mu,g^*}) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w^{f^*}(s,\tau) \quad &= \quad r_B^{f^*,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_B(w^{f^*}, (s,\tau), \tilde{Q}^{f^*,g^*}) \\
&= \quad \sup_{\xi \in \mathbb{P}_{\mathcal{B}_{(s,\tau)}}} \left\{ r_B^{f^*,\xi}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_B(w, (s,\tau), \tilde{Q}^{f^*,\xi}) \right\}
\end{aligned}
$$

Resultados de Optimalidad

$$
\begin{aligned}
w^{g^*}(s,\tau) &= r_A^{f^*,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_A(w^{g^*},(s,\tau),\tilde{Q}^{f^*,g^*}), \\
&= \sup_{\mu\in\mathbb{P}_{\mathcal{A}_{(s,\tau)}}} \left\{ r_A^{\mu,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_A(w,(s,\tau),\tilde{Q}^{\mu,g^*}) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w^{f^*}(s,\tau) &= r_B^{f^*,g^*}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_B(w^{f^*},(s,\tau),\tilde{Q}^{f^*,g^*}) \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{P}_{\mathcal{B}_{(s,\tau)}}} \left\{ r_B^{f^*,\xi}(s,\tau) + \frac{\alpha_\tau}{\alpha_{\tau-1}}\ \sigma_B(w,(s,\tau),\tilde{Q}^{f^*,\xi}) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
w^{g^*}(s,\tau) = {J_A}^{f^*,g^*}(s,\tau) = \sup_{\pi} {J_A}^{\pi,g^*}
$$

$$
w^{f^*}(s,\tau) = {J_B}^{f^*,g^*}(s,\tau) = \sup_{\gamma} {J_B}^{\pi,g^*}
$$

Pendiente

- Fijadas f y g, cada operador es contractivo. Pero cada uno ya es un supremo en si mismo.
    - ¿Se puede usar para hacer iteraciones de punto fijo?
    - ¿En qué espacio de funciones, con qué norma?
    - ¿Híbrido entre PI y VI?
- Equilibrios de tipo Stackelberg.
    - ¿Se puede hacer algo aprovechando el PPD?
    - ¿Stackelberg online?

Pendiente

- Fijadas f y g, cada operador es contractivo. Pero cada uno ya es un supremo en si mismo.
  - ¿Se puede usar para hacer iteraciones de punto fijo?
  - ¿En qué espacio de funciones, con qué norma?
  - ¿Híbrido entre PI y VI?
- Equilibrios de tipo Stackelberg.
  - ¿Se puede hacer algo aprovechando el PPD?
  - ¿Stackelberg online?

Parte del trabajo realizado por E. Della Vecchia se encuentra financiado por el Proyecto de Cooperación Internacional STIC AmSuD, *DyGaMe: Dynamic Games Methods*.