Risque de Modèle pour les produits dérivés

I.Laachir, C.Martini, Zeliade & ANR ISOTACE

5 février 2013

Table of contents

Vanilles

- Call: droit d'acheter une action S_t au prix K (strike) a la date future T (maturité)
- Put: droit de vendre une action S_t au prix K a T

Cotes en bourse, très liquides. Wording "Vanilles".

- Payoff du Call: $(S_T - K)_+$
- Put: $(K - S_T)_+$

Exotiques

Produits sur mesures, OTC. Exemples:

- Option Barriere Down: Call qui s'éteint si S passe en-dessous du niveau B entre t et T.
- Call sur le Maximum de plusieurs actions
- Call dont le strike sera la valeur de l'action a une date intermédiaire avant la maturité

Le payoff est plus compliqué, dépend typiquement de toute la trajectoire. On le note H_T

Paradigme AOA

AOA: Absence d'Opportunité d'Arbitrage (arbitrage: faire de l'argent sans risque). Hypothèses de marche parfait, taux nuls. Si P est la proba ambiante (historique):

- Equivalent a: $\exists Q \sim P / S$ est une Q-martingale
- Vrai en plusieurs dimensions. En particulier, les prix C_t des Calls/Puts liquides sont des Q martingales.

On a donc (Calls):

$$C_t = E^Q[(S_T - K)_+]$$

Apparait naturellement un premier ensemble de *modèles*:

$$M(P) = Q \sim P / S \text{ est une Q-martingale}$$

Dualité Martingales Stratégies

- Stratégies: $\int_0^T \Delta_u dS_u$. Objet central des maths financières des produits dérivés.
- Pour toute martingale de $M(P)$, $E^Q[\int_0^T \Delta_u dS_u] = 0$

Soient $\overline{c}, \overline{\Delta}, \underline{c}, \underline{\Delta}$ tels que:

$$\overline{c} + \int_0^T \overline{\Delta}_u dS_u \geq H_T \geq \underline{c} + \int_0^T \underline{\Delta}_u dS_u$$

Alors

$$\overline{c} \geq \sup_{Q \in M(P)} E^Q[H_T] \geq \inf_{Q \in M(P)} E^Q[H_T] \geq \underline{c}$$

Modèles calibrés

On peut estimer qu'un modèle doit de plus reproduire les prix des produits vanilles:

$$C_t = E^Q[(S_T - K)_+]$$

Plusieurs variantes:

- Discrète (très adaptée aux *stocks*): $C_t(i,j) = E^Q[(S_{T_i} - K_j)_+]$ (Avellaneda)
- Discrète en maturité, continue en strike (indices): la donnée des prix de maturité T_i est équivalente a la donée de la loi marginale (sous la proba de marché) de S_{T_i}, μ_{T_i} (cadre de HLT)
- Continue en maturité et strike: ensemble continu de lois $\mu_u, 0 < u < T$ (cadre des Peacocks, HPRY)

Risque de Modèle

On arrive à la formulation de la problématique du risque de modèle:

$$\sup_{Q \in M(P)} (\text{ou}\,\inf) E^Q[H_T]$$

sous les contraintes (au choix):

1. $\forall i, j, C_t(i,j) = E^Q[(S_{T_i} - K_j)_+]$
2. $\forall i, S_{T_i} \sim \mu_{T_i},$
3. $\forall u, 0 < u < T, S_u \sim \mu_u$

Weighted Monte Carlo

On considère M trajectoires $(\omega_m)_{1 \leq m \leq M}$, à chaque trajectoire est associée un poids q_m. Relation de calibration:

$$\sum_m q_m (S_{T_i}(\omega_m) - K_j)_+ = C_{i,j}$$

- $M >> 1$: Infinité de solutions p.
- Condition supplémentaire: Chercher la probabitlité "la plus proche" d'une probabilité de référence p.
- Entropie relative $D(q,p) = \sum_m q_m \log(\frac{p_m}{q_m})$.

  Le problème à résoudre:

  $$\inf\{D(q,p) \text{ ; avec } \sum_m q_m (S_{T_i}(\omega_m) - K_j)_+ = C_{i,j}\}$$

- Dimension du problème: $M >> 1$

Weighted Monte Carlo: Problème Dual

- Le problème dual est:

$$\inf_{\lambda} \sup_{q} \left\{ -D(q,p) + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \Big(\sum_{m} q_m (S_{T_i}(\omega_m) - K_j)_+ - C_{i,j} \Big) \right\}$$

- Problème Dual

$$\inf_{\lambda} \left\{ \log\Big(Z(\lambda) \Big) - \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j} \right\}$$

$$\text{avec } Z(\lambda) = \sum_{m} \exp\left[\sum_{i,j} (S_{T_i}(\omega_m) - K_j)_+ - \lambda_{i,j} \right]$$

- Dimension du problème Dual : nombre de produits de calibration $\#(C_{i,j}) << M$
- Résolution numérique avec un algorithme d'optimization (e.g. LBFGS).

Weighted Monte Carlo: pros and cons

- Pros:
  - maths faciles, implémentation assez facile
  - formules explicites pour les sensibilités par rapport aux $C(i,j)$
- Cons:
  - robustesse par rapport à l'ensemble de trajectoires?
  - pas de notion temporelle, difficulté de modéliser la martingalité
  - arbitraire du critère d'entropie relative, et du prior p

UVM

L'idée est de choisir un sous ensemble pertinent de $M(P)$:

$$dS_u = \sigma_u S_u dB_u$$

où σ est *inconnue*, avec $\underline{\sigma} < \sigma_u < \overline{\sigma}$.
(en fait, ensemble de lois martingales *non-dominées*, qui modélise l'incertitude de modèle)
Mène à une EDP fully-non linear dans le cas $H_T = \varphi(S_T)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 [\overline{\sigma}^2 (\frac{\partial^2 v}{\partial t^2})_+ - \underline{\sigma}^2 (\frac{\partial^2 v}{\partial t^2})_-] = 0$$

avec $v(T, .) = \varphi$.

UVM Lagrangien

Approche duale Lagrangienne: comme dans Weighted Monte Carlo. Pour tout λ, on résout l'EDP avec la condition finale

$$\varphi(S_T) - \Sigma_{\text{mat.}\,T} \lambda_j (S_T - K_j)+$$

. entre $T = T_N$ et T_{N-1}. Puis, entre T_{N-2} et T_{N-1}, l'EDP avec la condition finale:

$$v(T_{N-1}, S_{T_{N-1}}) - \Sigma_{\text{mat.}\,T_{N-1}} \lambda_j (S_T - K_j)+$$

.

UVM Lagrangien: pros and cons

- Pros:
  - ensemble très pertinent, $M(P)$ est trop gros sans ce genre de restrictions
  - propriétés de monotonie en $[\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]$ du prix de n'importe quelle option
  - algorithme chaine de Markov contrôlée pour approximer v
- Cons:
  - maths difficiles, non-domination statistique..
  - algorithme pas clair pour des options quelconques H_T
  - choix des bornes $\underline{\sigma}, \overline{\sigma}$, nécessité d'étendre à des bornes déterministes ou vols locales
  - comportement numérique de l'optimiseur: pas de régularité C2, zones d'indifférence en λ

Approche transport optimal

Cf slides Nizar

Roadmap

1. Spécifier des business cases:
   - options OT, DNT sur le FX, avec contraintes Avellaneda
   - rainbow options sur Equity, avec contraintes HLT
   - business cases du papier Automated Pricing de HL
   - ...
2. Comparer les 3 méthodes sur ces cas concrets
3. Décliner l'approche HLT avec des contraintes supplémentaires sur les modèles admissibles (volatilité, etc..)
4. Problématiques de coûts de transaction et de liquidité
5. Que faire concrètement de la mesure du risque modèle obtenue et de son calcul quotidien?
6. Réfléchir à une problématique moins 'statique' qui prenne en compte l'*historique* des prix stock et vanilles

Biblio

- *Managing the Volatility Risk of Portfolios of Derivative Securities: the Lagrangian Uncertain Volatility Model*, M. Avellaneda, A. Paras. Applied Mathematical Finance, 3, 21-52, 1996
- *Weighted Monte Carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models*, M. Avellaneda, R. Buff, C. Friedman, N. Grandchamp, L. Kruk, J. Newman, International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 4, No. 1 (2001) 91
- *Automated Option Pricing: Numerical Methods*, Pierre Henry-Labordere, Derivatives eJournal 12 2011; DOI:10.2139 ssrn 1968344
- *Peacocks and associated martingales, with explicit constructions*, F. Hirsch, C. Profeta, B. Roynette, M. Yor