

# Quelques problèmes de physique et d'ingénierie mathématiques

Juliette Leblond, équipe APICS



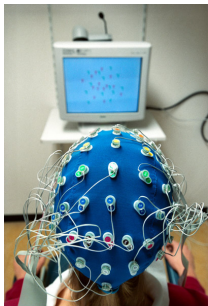
# Quelques problèmes de physique et d'ingénierie mathématiques

↪ ... (re-)mettre l'accent sur l'ingénierie ;) ?!

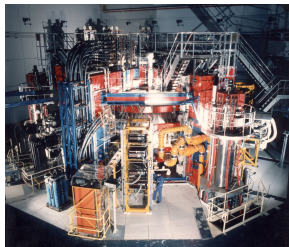
ingénierie



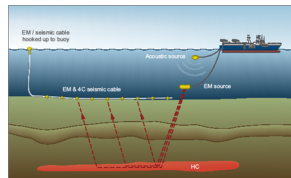
# Physique, ingénierie



électro-  
encéphalographie  
(**EEG**),  
imagerie médicale,  
neurosciences



**tokamak**, physique  
thermonucléaire,  
plasma confiné,  
énergie, fusion



**géophysique**  
prospection sous-sols,  
sismique,  
géodésie

# Problèmes

EEG (et IRM)

tokamak

géophysique

Mesures :

électriques (E)

magnétiques (M)

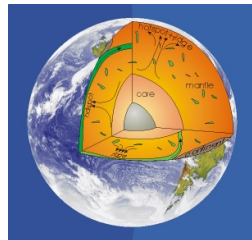
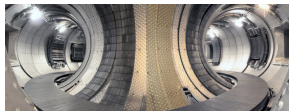
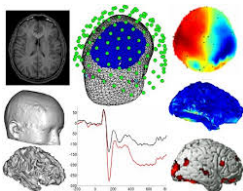
EM + ultrasons  
+ gravimétriques

But : localiser

les sources  
de courant

la frontière  
du plasma

les zones sismiques,  
ou hétérogènes



Problèmes "inverses" ...

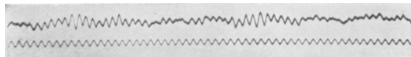
contrôle non destructif, ondes

# EEG, un peu d'histoire (wikipédia)

Méthode d'exploration cérébrale qui mesure l'activité électrique du cerveau par des électrodes placées sur le cuir chevelu.

Examen indolore et non-invasif qui renseigne sur l'activité neurophysiologique du cerveau au cours du temps, dans un but diagnostique en neurologie ou dans la recherche en neurosciences cognitives.

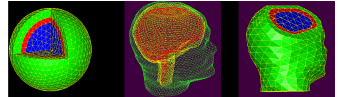
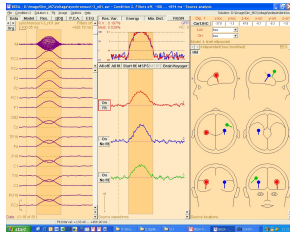
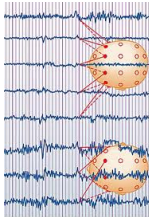
Le signal électrique à la base de l'EEG est la résultante des potentiels d'action post-synaptiques synchrones issus d'un grand nombre de neurones.



Premier électro-encéphalogramme (Hans Berger, 1929)

On parle aussi d'EEG intra-crânienne (iEEG), sous-durale ou stéréotaxique (sEEG) pour désigner des mesures effectuées à partir d'électrodes implantées sous la surface du crâne.

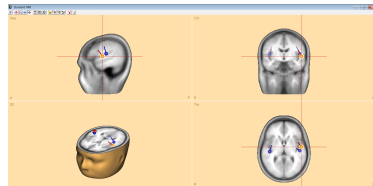
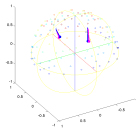
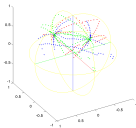
# Problème inverse EEG



Mesures :  
potentiel

électroencéphalogramme,  
électrodes sur le scalp

modèle sphérique 3 couches,  
cerveau, crâne, scalp



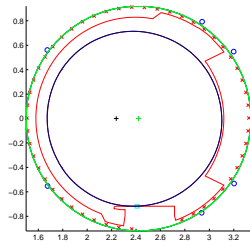
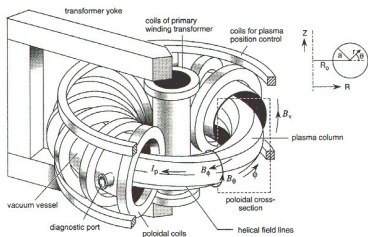
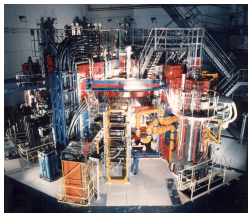
Localisation :  
courant

2 sources  
logiciel FindSources3D ●

dans le cerveau  
simulateur BESA ●

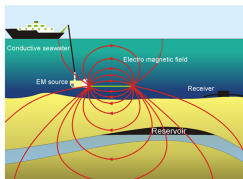
Applications : imagerie médicale, neurosciences, diagnostics cliniques

# Tokamaks

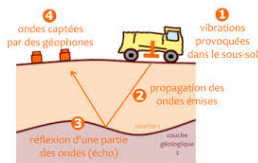


Frontière du plasma — calculée dans le tokamak Tore Supra (CEA Cadarache) depuis les mesures magnétiques  $\times$  et  $\circ$   
Applications : énergie (tokamaks WEST, ITER)

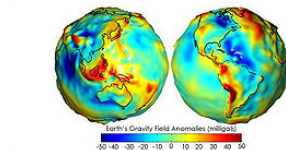
# Géophysique



prospection

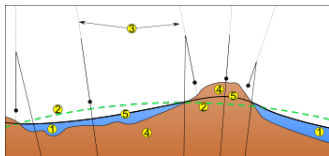


mesures acoustiques,



sol, avions, satellites,  
gravimétrie

Problèmes inverses :  
calculer le géoïde  
ou localiser les zones sismiques,  
nappes pétrolifères, ...



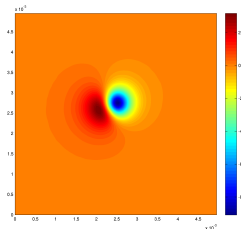
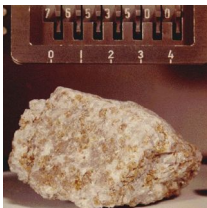
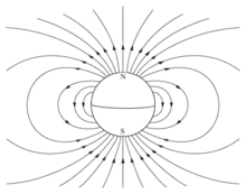
zones d'hétérogénéités de la densité gravitationnelle

géoïde = surface équipotentielle du champ de gravité terrestre ( $\simeq$  ellipsoïde)

Applications : hydrologie, aéronautique, balistique, GPS



# Magnétisation



Problème inverse : météorites (lune)

champ magnétique radial

mesures magnétiques (prises au dessus de tranches du caillou),

retrouver la “**magnétisation**” (quantité contenue à l'intérieur)

Applications : étude du champ magnétique, planètes et terre, paléomagnétisme

# Modèles

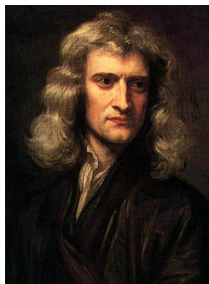
Même famille de modèles mathématiques de comportement pour ces différents phénomènes physiques représenté par un potentiel :

- électrique (EEG), (tension, volts)
- magnétique (tokamak), (magnétisation), (lié au champ magnétique)
- gravitationnel (géophysique) (lié à l'attraction gravitationnelle)

# Modèles

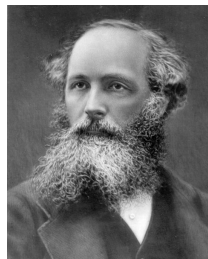
Modèles physiques : équations de Newton, Maxwell

gravitation



Isaac Newton  
(1643–1727)

électromagnétisme



James Clerk Maxwell  
(1831–1879)

# Modèles

Modèles mathématiques : équations de Laplace–Poisson



Pierre-Simon (de) Laplace  
(1749–1827)



Siméon Denis Poisson  
(1781–1840)

## Qui sont ces gens ?

Isaac Newton (1643–1727) : philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.

Pierre–Simon Laplace (1749–1827) : mathématicien, astronome et physicien français (et politicien... ?).

Siméon Denis Poisson (1781–1840) : mathématicien, géomètre et physicien français.

James Clerk Maxwell (1831–1879) : physicien et mathématicien écossais.

(source wikipédia)

Europe et pluridisciplinarité ?

## Pierre–Simon Laplace, digressions...

À la différence de beaucoup d'autres mathématiciens, Laplace ne donne pas aux mathématiques un statut particulier, il y voit plutôt un instrument utile pour la recherche scientifique et pour les problèmes pratiques.

Par exemple, Laplace a considéré l'analyse comme un outil pour affronter les problèmes physiques, tout en se montrant extrêmement habile pour inventer les concepts dont il a besoin pour atteindre cet objectif.

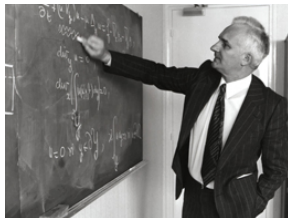
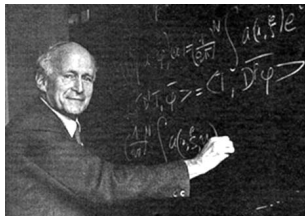
Il a conjecturé l'existence des trous noirs.

# Mathématiques (et appliquées), calcul scientifique

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) : mathématicien et physicien français ; préfet de l'Isère.

Laurent Schwartz (1915–2002) : mathématicien français ; militant politique engagé.

Jacques-Louis Lions (1928–2001) : mathématicien français ; premier président de l'INRIA.



## Ce que Jacques-Louis Lions aime dans les mathématiques appliquées

“Ce que j’aime dans les mathématiques appliquées, c’est qu’elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d’agir.

Et, de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu’elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure.

Du coup, ce qui m’intéresse, c’est de savoir jusqu’où on peut aller dans ce domaine de la modélisation des systèmes, c’est d’atteindre les limites.”

Jacques-Louis Lions



# Pour quoi faire des mathématiques ?

“Parce que les mathématiques, ça sert à faire de la physique.  
La physique, ça sert à faire des frigidaires.  
Les frigidaires, ça sert à y mettre des langoustes,  
et les langoustes, ça sert aux mathématiciens,  
qui les mangent et sont alors dans de bonnes dispositions  
pour faire des mathématiques,  
qui servent à la physique, qui sert à faire des frigidaires,  
qui...”

Laurent Schwartz

# L'efficacité des mathématiques...

... est-elle si "déraisonnable" ?

Étienne Klein (physicien, philosophe français)

- "La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature" Eugene Wigner (physicien hongrois, 1902–1995)

- "La Mathématique est la reine des sciences..." (C.F. Gauss)  
et leur "bonne à tout faire" ? (É. Klein ?)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) : "... et l'Arithmétique est la reine des mathématiques"  
mathématicien, astronome et physicien allemand

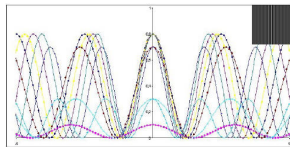
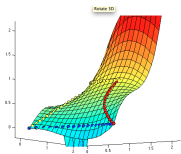
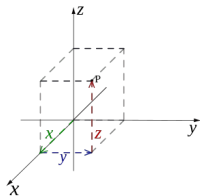


"le prince des mathématiciens" !

- Platon, Aristote, Galilée, Kant, ...



# Équations de Laplace



$$\text{Laplacien} \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

somme des dérivées secondes de  $U$  (variations de  $U$  dans les différentes directions)

$U$  est "harmonique"  $\Delta U = 0$  en l'absence de sources, si  $S = 0$

# Fonctions, problème inverse EEG

Relations mathématiques (traduisent ici les lois physiques)

$U(x, y, z)$  est une **fonction** des variables d'espace  $(x, y, z)$   
qui vérifie l'équation (la loi)  $\Delta U = S$

$S$  a un modèle de comportement aussi (dipôles ponctuels)

**Problème inverse** : depuis des valeurs (approximatives) de  $U$  en certains points  $(x, y, z)$  (électrodes, sur le scalp),  
trouver  $S$  (dans le cerveau)

Même s'il existe une unique solution, la résolution est instable (erreurs de mesures)

↪ problème "mal posé"  $\Rightarrow$  régularisation

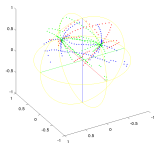
↪ **approximation**, optimisation sous contrainte : stable (robuste)

Problème direct associé : connaissant  $S$ , calculer  $U$  (bien posé)

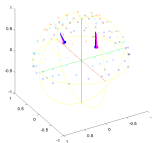
# Problème inverse EEG

Mesures :

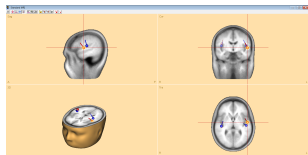
potentiel



EEG, électrodes  
sur le scalp



3 couches, cerveau,  
crâne, scalp



Localisation :

courant

2 sources

logiciel FindSources3D ●

dans le cerveau

simulateur BESA ●

Technique de résolution :

optimisation

meilleure approximation sous contraintes

- transmission des mesures du scalp au cortex
- approximation sur des sections planes

# Problèmes inverses, exemples

- trouver  $x$  tel que  $2(x + 1) = 6$

$$x = 2$$

Problèmes directs...

- dans le plan  $(x, y)$  : trouver  $(x, y)$  tel que  $2(x + 1) + y = 6$

∞ solutions...

$x, y$  nombres entiers ?

$(0, 4), (1, 2), (2, 0)$

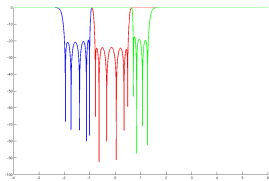
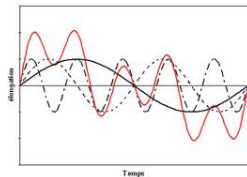
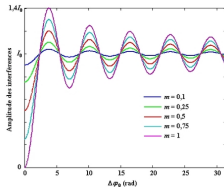
et strictement positifs ?

$(1, 2)$

ou tels que  $x + y$  maximal ?

$(0, 4)$

- interpolation : trouver des fonctions  $y = f(x)$  passant les "mêmes" points  $y = 0$

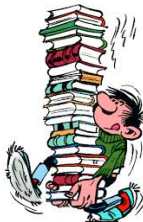
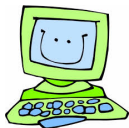


sinusoïdes, harmoniques

meilleure approximation sous contraintes, APICS

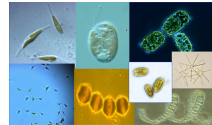
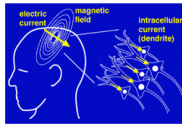
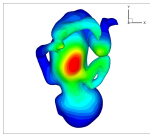
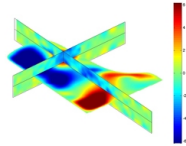
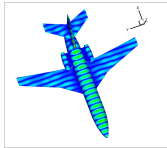
# Quels techniques et outils ?

mathématiques, mathématiques appliquées, modélisation, analyse (fonctions), géométrie, algèbre (structures, calculs), arithmétique, théorie des nombres, calcul scientifique, maillages, optimisation, approximation constructive, équation aux dérivées partielles, systèmes différentiels, informatique, langages de programmation, calcul formel, simulations numériques, algorithmique, logiciels, ...





# Autres problèmes et applications



# Autres problèmes et applications

traitement du signal, des ondes, son, parole, images, vision,  
identification, contrôle, automatique, robotique, ingénierie,  
télécommunications, filtres hf, téléphonie, réseaux, wi-fi ;)  
santé, imagerie médicale, énergie, espace, transports, trafic,  
informatique, calcul formel, simulations numériques,  
cryptographie, navigation, musique, arts, météo  
communication humain-ordinateur, ergonomie, hardware,  
physique, chimie, biologie, économie, finances ;(  
... ..

## Principaux partenaires

Leeds University (GB), LAMSIN-ENIT Tunis, MIT Cambridge,  
Vanderbilt University Nashville (US, équipe associée INRIA)

Hôpital Timone Marseille, IGN-LAREG Paris, BESA Allemagne

CMA Mines ParisTech, Universités Joseph Fourier Grenoble,  
Orléans, Aix-Marseille, Bordeaux

Équipes APICS, ATHENA, CASTOR, ...

et les services !  
travail coopératif :)



# Où sont les femmes ?

Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) : mathématicienne et philosophe italienne ; première femme à obtenir le titre de docteur.

Sofia Vassilievna Kovalevskaja (1850–1891) : mathématicienne russe ; première femme docteur en Allemagne (1874).

Maria Agnesi



Sophie Kowalevski



## Conclusion

“La théorie, c’est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.  
La pratique, c’est quand tout fonctionne et que personne ne sait  
pourquoi.

Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne... et  
personne ne sait pourquoi !” ;)

Albert Einstein (1879–1955)

physicien allemand, puis apatride, suisse, et helvético-américain

