Le trafic routier en équations

Paola Goatin

EPI OPALE

Modèle mathématique

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Un modèle peut servir à :

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Un modèle peut servir à :

- décrire

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Un modèle peut servir à :

- décrire
- prédire

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Un modèle peut servir à :

- décrire
- prédire
- contrôler

Modèle mathématique (sur WIKIPEDIA)

Un modèle mathématique est la description d'un système par le langage des mathématiques.

Un modèle peut servir à :

- décrire
- prédire
- contrôler
- optimiser

Équations

En mathématique, une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables, dites inconnues.

Équations

En mathématique, une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables, dites inconnues.

- $x^2 - 3x + 2 = 0$

Équations

En mathématique, une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables, dites inconnues.

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\qquad x = 1 \quad x = 2$

Équations

En mathématique, une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables, dites inconnues.

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x = 1 \quad x = 2$
- $y' = \alpha y$

Équations

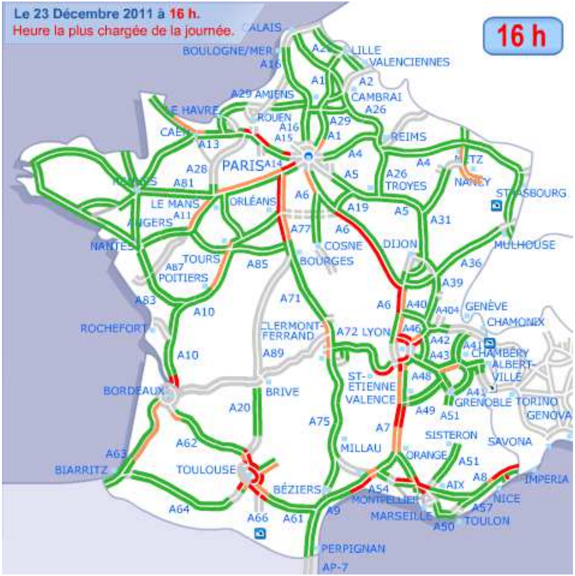
En mathématique, une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables, dites inconnues.

- $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\qquad x = 1 \quad x = 2$
- $y' = \alpha y$ $\qquad y(t) = e^{\alpha t}$

Pourquoi des modèles de trafic ?

situation temps réel

Pourquoi des modèles de trafic ?

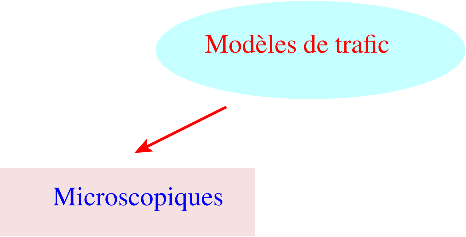


prévisions

Modèles de trafic (routier ou piétonnier)

Modèles de trafic

Modèles de trafic (routier ou piétonnier)



Modèles de trafic (routier ou piétonnier)

Modèles de trafic

Microscopiques

une équation
pour chaque voiture

Modèles de trafic (routier ou piétonnier)

Modèles de trafic

Microscopiques

Macroscopiques

une équation
pour chaque voiture

Modèles de trafic (routier ou piétonnier)

Modèles de trafic

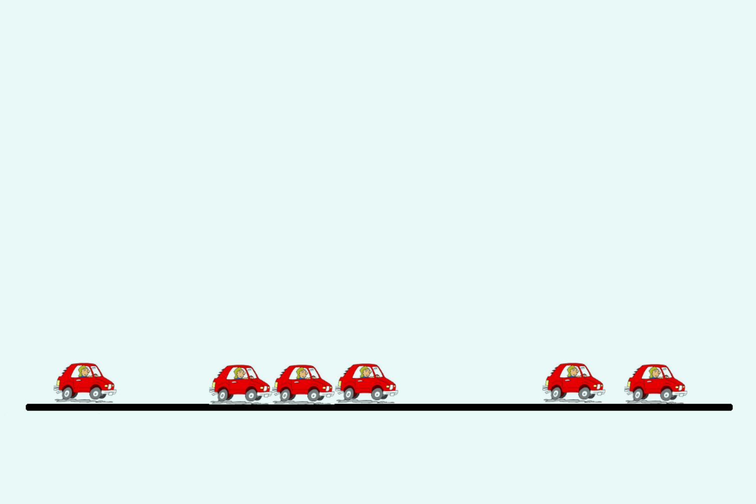
Microscopiques

une équation
pour chaque voiture

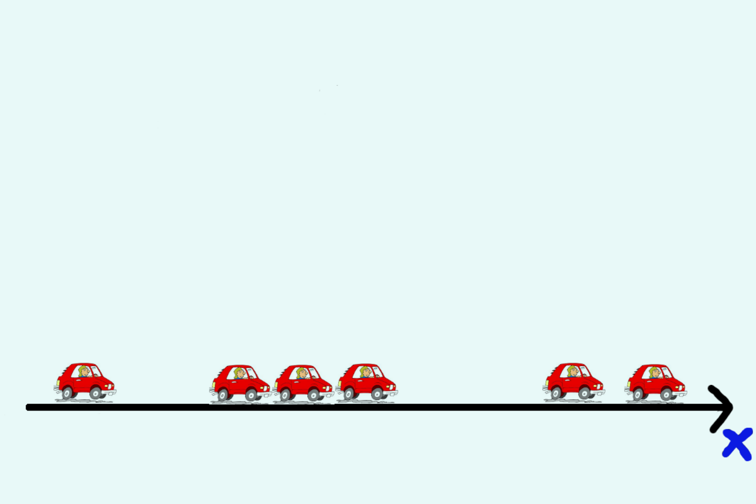
Macroscopiques

une seule équation
pour la densité

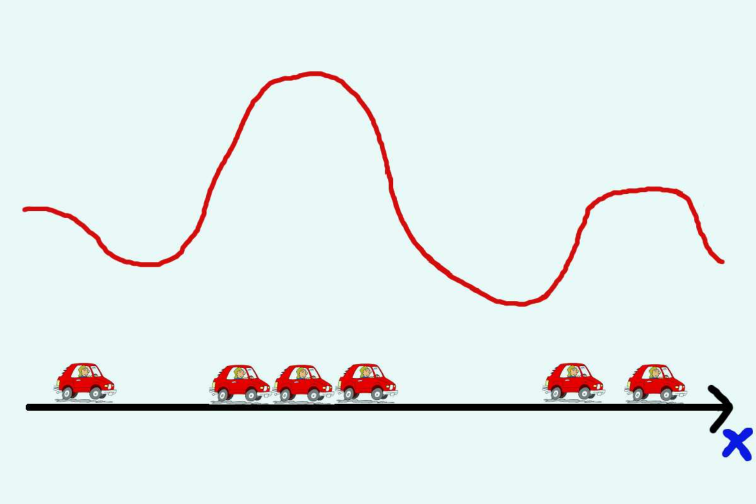
Modèles macroscopiques



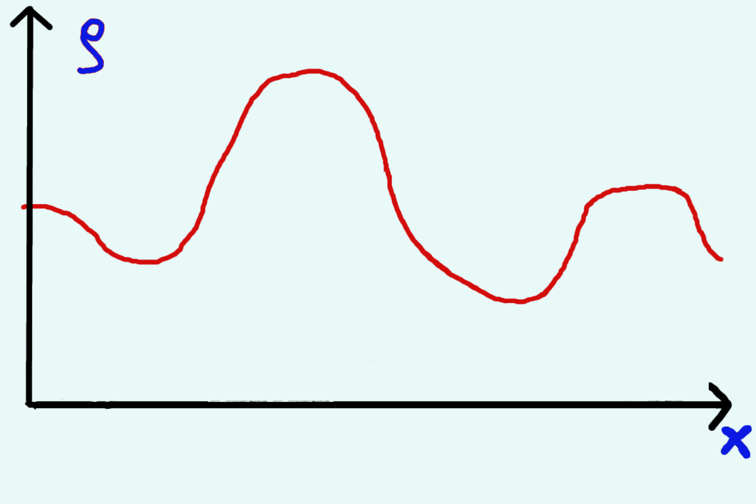
Modèles macroscopiques



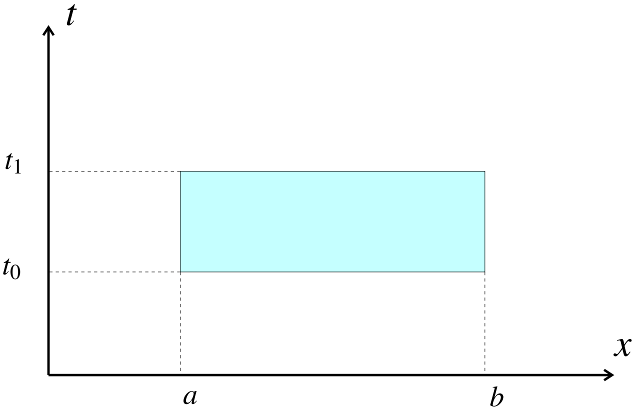
Modèles macroscopiques



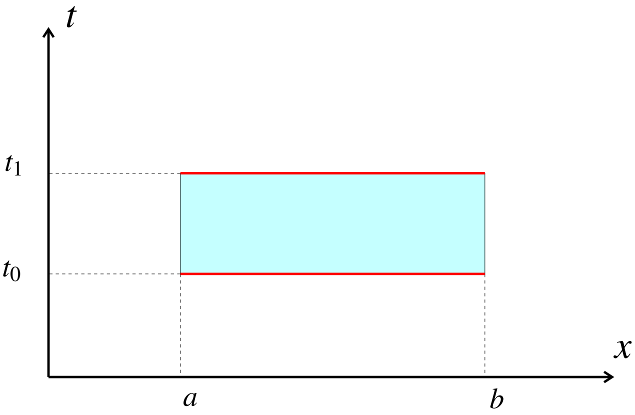
Modèles macroscopiques



Modèles macroscopiques



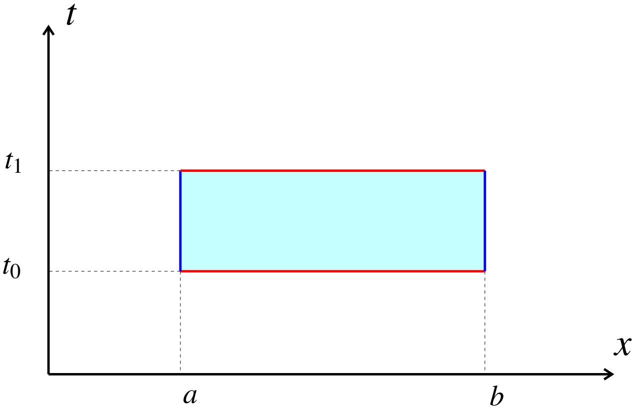
Modèles macroscopiques



Nombre de voitures au temps t_1 entre a et b : $\int_a^b \rho(t_1, x)dx$

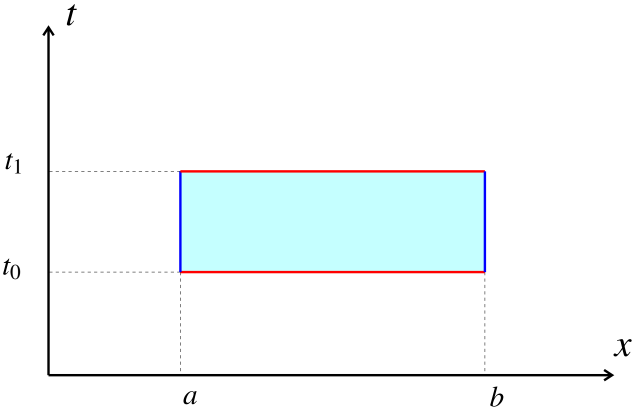
Nombre de voitures au temps t_0 entre a et b : $\int_a^b \rho(t_0, x)dx$

Modèles macroscopiques



$$\int_a^b \rho(t_1,x)\,dx - \int_a^b \rho(t_0,x)\,dx = -\int_{t_0}^{t_1} f(t,b)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} f(t,a)\,dt$$

Modèles macroscopiques



$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$$

Conditions requises

Conditions requises

- Aucune information ne doit se propager plus vite que les véhicules (anisotropie)

Conditions requises

- Aucune information ne doit se propager plus vite que les véhicules (anisotropie)
- Relation flux-densité : $f(t,x) = \rho(t,x)v(t,x)$.

Conditions requises

- Aucune information ne doit se propager plus vite que les véhicules (anisotropie)
- Relation flux-densité : $f(t,x) = \rho(t,x)v(t,x)$.
- La densité et la vitesse moyenne doivent toujours être non-négatives et bornées : $0 \leq \rho(t,x),\ v(t,x) < +\infty, \forall x, t > 0$.

Conditions requises

- Aucune information ne doit se propager plus vite que les véhicules (anisotropie)
- Relation flux-densité : $f(t,x) = \rho(t,x)v(t,x)$.
- La densité et la vitesse moyenne doivent toujours être non-négatives et bornées : $0 \leq \rho(t,x),\ v(t,x) < +\infty, \forall x, t > 0$.
- Ce n'est pas vraiment de la dynamique des fluides :
  - direction privilégiée
  - pas de conservation de la quantité de mouvement / energie
  - pas de viscosité
  - Nombre d'Avogadro pour les voitures : 106 vh/lane$\times$km $\ll 6 \cdot 10^{23}$

Modèles macroscopiques

$n \ll 6 \cdot 10^{23}$ mais ...

Modèle de Lighthill-Whitham-Richards (1955)

Si on prend $f = f(\rho) = \rho v(\rho)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\rho(t,x)\right) = 0$$

Modèle de Lighthill-Whitham-Richards (1955)

Si on prend $f = f(\rho) = \rho v(\rho)$:

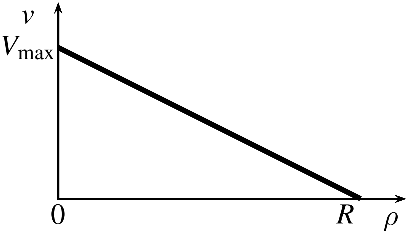
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\rho(t,x)\right) = 0$$

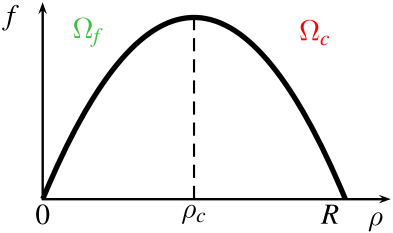
- Équation aux dérivées partielles (EDPs)
- Loi de conservation
- Les solutions sont discontinues en général

Modèle de Lighthill-Whitham-Richards (1955)

$v = v(\rho)$ vitesse moyenne :

- décroissante : $v'(\rho) \leq 0$
- $v(0) = V_{\max}$
- $v(R) = 0$

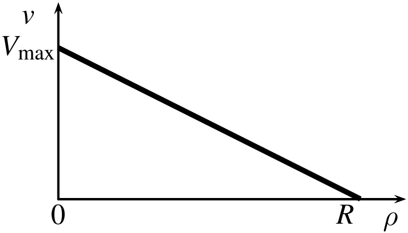


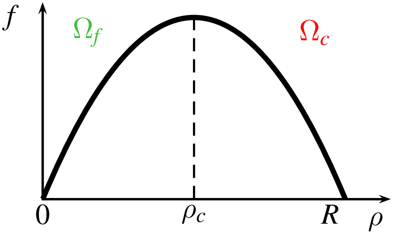


Modèle de Lighthill-Whitham-Richards (1955)

$v = v(\rho)$ vitesse moyenne :

- décroissante : $v'(\rho) \leq 0$
- $v(0) = V_{\max}$
- $v(R) = 0$



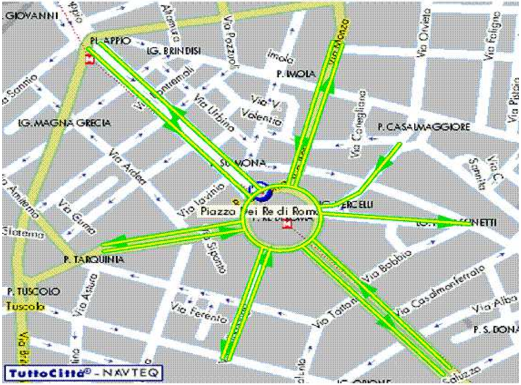


avec R densité maximale (embouteillage) et ρ_c densité critique :

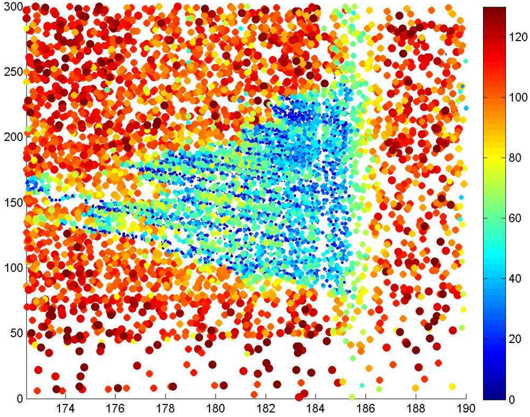
- flux croissant pour $\rho \leq \rho_c$: phase d'écoulement fluide
- flux décroissant pour $\rho \geq \rho_c$: phase de congestion

Exemple de simulation

Un grand rond-point à Rome :

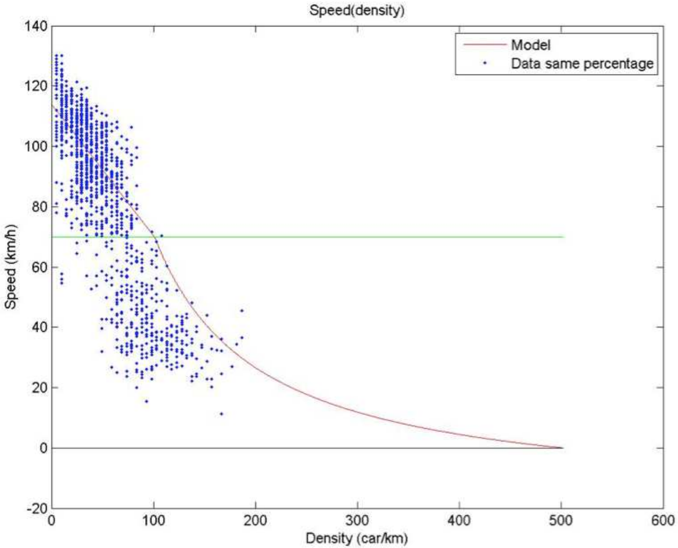


En réalité, $v = v(\rho)$?

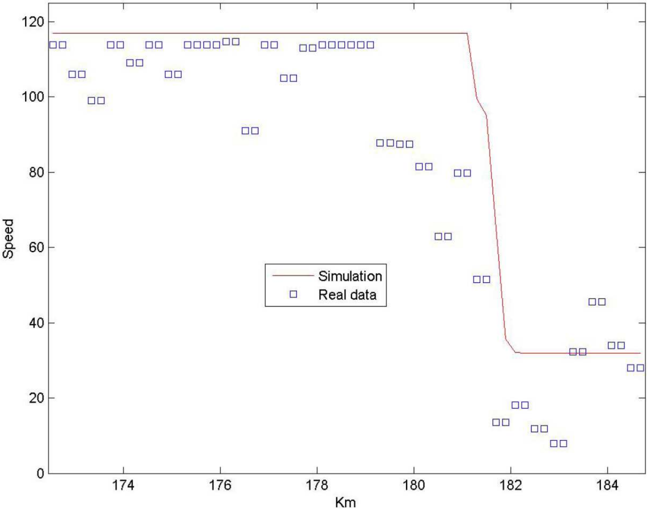


A8 de Antibes à Nice St. Isidore :
données GPS du 19 mars 2013 entre 6h et 11h

En réalité, $v = v(\rho)$?



Même si $v \neq v(\rho)$...



Données réelles et simulation à $t_0 + 15\text{min}$

Comment améliorer le modèle :

Comment améliorer le modèle :

- Modifier la définition de vitesse moyenne

$v \neq v(\rho)$

Comment améliorer le modèle :

- Modifier la définition de vitesse moyenne
- Ajouter une équation pour v

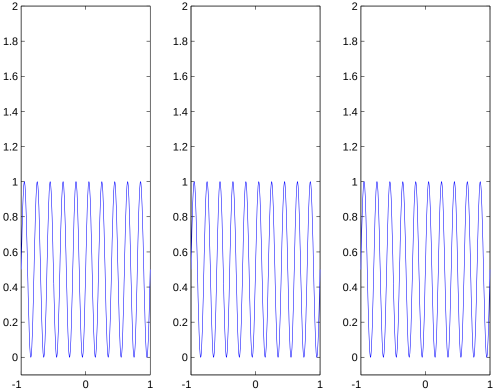
Un modèle à vitesse non-locale

$$\text{à l'aval :} \qquad v(t,x) = v\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{x}^{x+\epsilon} \rho(t,y)dy\right)$$

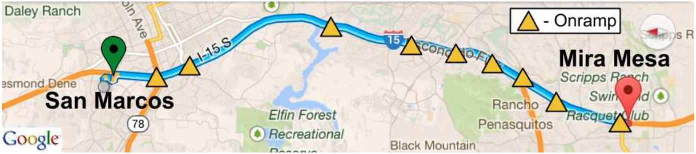
$$\text{au centre :} \qquad v(t,x) = v\left(\frac{1}{2\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \rho(t,y)dy\right)$$

$$\text{amont :} \qquad v(t,x) = v\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{x-\epsilon}^{x} \rho(t,y)dy\right)$$

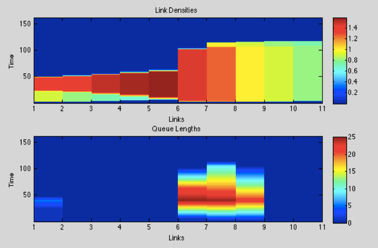
Un modèle à vitesse non-locale



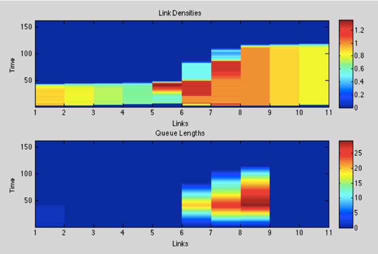
Contrôle d'accès :



Un exemple de contrôle optimal

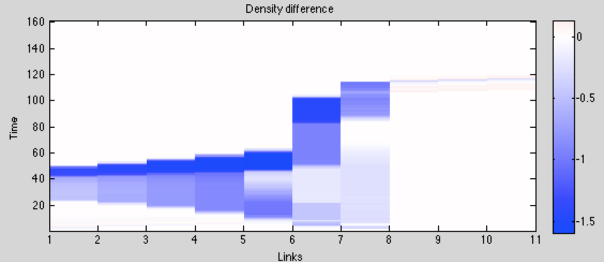


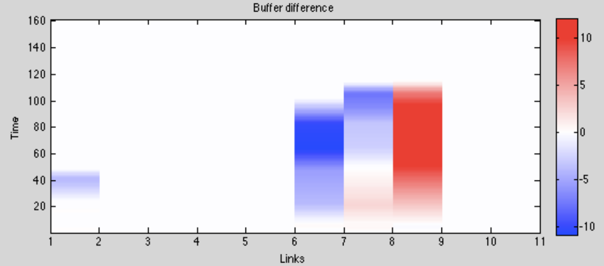
sans contrôle



contrôle optimal

Un exemple de contrôle optimal





Merci !

Questions ?