

Des rochers magnétiques

Café In

Laurent Baratchart

Inria Sophia-Antipolis Méditerranée

13 octobre 2014





APICS (Inria Sophia-Antipolis, France),



E. Lima and **B. Weiss**

(Earth, Atmospheric and Planetary Sciences Dpt., MIT,
Cambridge Massachusetts, USA)



and **D. Hardin** and **E. Saff**

(Center for Constructive Approximation,
Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA).

Qu'est-ce que l'aimantation ?

Qu'est-ce que l'aimantation ?

- ▶ Un phénomène physique que l'on explique par la mécanique quantique.

Qu'est-ce que l'aimantation ?

- ▶ Un phénomène physique que l'on explique par la mécanique quantique.
- ▶ L'aimantation résulte d'un alignement cohérent du spin des électrons dans la matière.

Qu'est-ce que l'aimantation ?

- ▶ Un phénomène physique que l'on explique par la mécanique quantique.
- ▶ L'aimantation résulte d'un alignement cohérent du spin des électrons dans la matière.
- ▶ Si les spins sont orientés dans tous les sens et s'annihilent mutuellement, le matériau n'est pas aimanté.

Qu'est-ce que l'aimantation ?

- ▶ Un phénomène physique que l'on explique par la mécanique quantique.
- ▶ L'aimantation résulte d'un alignement cohérent du spin des électrons dans la matière.
- ▶ Si les spins sont orientés dans tous les sens et s'annihilent mutuellement, le matériau n'est pas aimanté.
- ▶ Si les spins se renforcent les uns les autres par leur alignement, une aimantation macroscopique apparaît.

Qu'est-ce que l'aimantation ?

- ▶ Un phénomène physique que l'on explique par la mécanique quantique.
- ▶ L'aimantation résulte d'un alignement cohérent du spin des électrons dans la matière.
- ▶ Si les spins sont orientés dans tous les sens et s'annihilent mutuellement, le matériau n'est pas aimanté.
- ▶ Si les spins se renforcent les uns les autres par leur alignement, une aimantation macroscopique apparaît.
- ▶ L'aimantation est une densité de moment magnétique par unité de volume.

Comment aimanter un matériau ?

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin.

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin. Ils ne sont pas aimantables.

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin. Ils ne sont pas aimantables.
- ▶ D'autres contrôlent moins bien leurs électrons (par exemple certains métaux qui en ont beaucoup).

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin. Ils ne sont pas aimantables.
- ▶ D'autres contrôlent moins bien leurs électrons (par exemple certains métaux qui en ont beaucoup). On peut les aimanter en les plongeant dans un champ magnétique.

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin. Ils ne sont pas aimantables.
- ▶ D'autres contrôlent moins bien leurs électrons (par exemple certains métaux qui en ont beaucoup). On peut les aimanter en les plongeant dans un champ magnétique.
- ▶ Cela marche encore mieux si on les chauffe.

Comment aimanter un matériau ?

- ▶ Certains matériaux ne laissent pas assez de liberté à leurs électrons pour qu'ils changent la direction de leur spin. Ils ne sont pas aimantables.
- ▶ D'autres contrôlent moins bien leurs électrons (par exemple certains métaux qui en ont beaucoup). On peut les aimanter en les plongeant dans un champ magnétique.
- ▶ Cela marche encore mieux si on les chauffe.
- ▶ Un matériau aimanté qui est chauffé a tendance à perdre son aimantation.

Comment les roches s'aimantent-elles ?

Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.

Comment les roches s'aimantent-elles ?

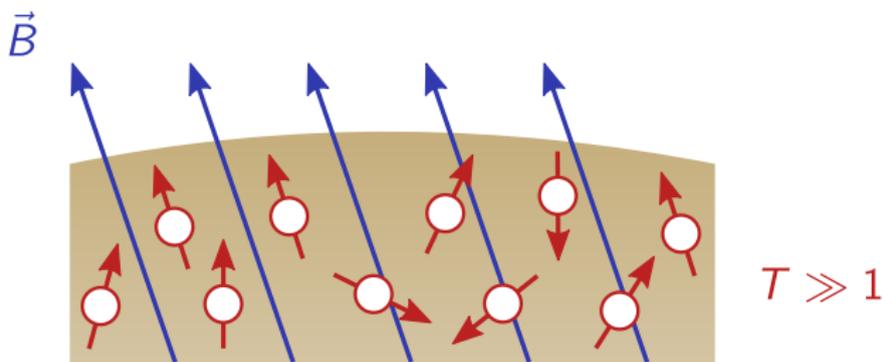
- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.

Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.
- ▶ Ces roches sont la mémoire magnétique de la formation du système solaire, pourvu qu'elles n'aient pas subi depuis des températures ou des champs magnétiques trop intenses.

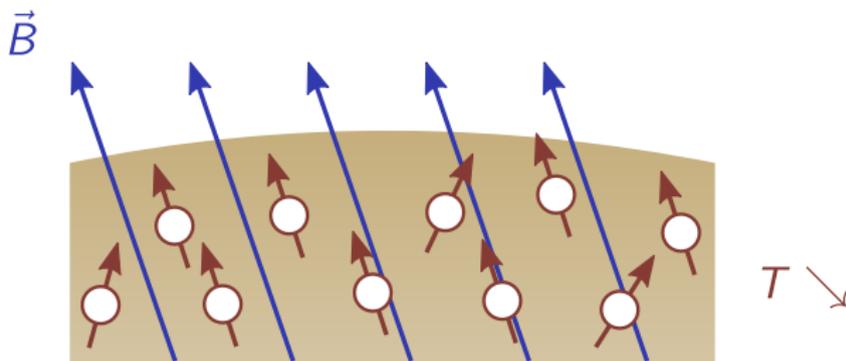
Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.
- ▶ Ces roches sont la mémoire magnétique de la formation du système solaire, pourvu qu'elles n'aient pas subi depuis des températures ou des champs magnétiques trop intenses.



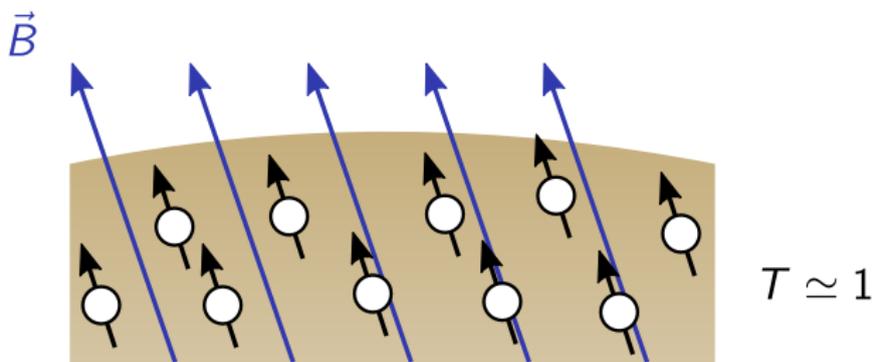
Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.
- ▶ Ces roches sont la mémoire magnétique de la formation du système solaire, pourvu qu'elles n'aient pas subi depuis des températures ou des champs magnétiques trop intenses.



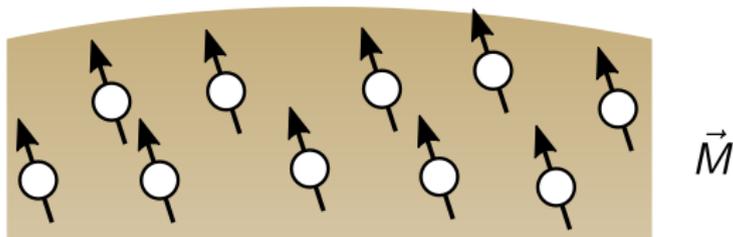
Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.
- ▶ Ces roches sont la mémoire magnétique de la formation du système solaire, pourvu qu'elles n'aient pas subi depuis des températures ou des champs magnétiques trop intenses.



Comment les roches s'aimantent-elles ?

- ▶ Lors de la formation du système solaire (-4.5 milliards d'années), des magmas en fusion se sont refroidis en restant exposés à des champs magnétiques.
- ▶ Les roches ainsi formées se sont aimantées pourvu qu'elles aient contenu des éléments ferromagnétiques.
- ▶ Ces roches sont la mémoire magnétique de la formation du système solaire, pourvu qu'elles n'aient pas subi depuis des températures ou des champs magnétiques trop intenses.



Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

- ▶ Parce qu'elles sont potentiellement, nous l'avons dit, des mémoires du champ magnétique ambiant lors de leur formation.

Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

- ▶ Parce qu'elles sont potentiellement, nous l'avons dit, des mémoires du champ magnétique ambiant lors de leur formation.
- ▶ On attend des roches les plus vieilles qu'elles nous renseignent sur l'intensité du champ magnétique lors de la formation de notre système solaire.

Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

- ▶ Parce qu'elles sont potentiellement, nous l'avons dit, des mémoires du champ magnétique ambiant lors de leur formation.
- ▶ On attend des roches les plus vieilles qu'elles nous renseignent sur l'intensité du champ magnétique lors de la formation de notre système solaire. Ceci aide à discriminer différentes hypothèses sur le scénario physique qui a présidé à cette phase.

Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

- ▶ Parce qu'elles sont potentiellement, nous l'avons dit, des mémoires du champ magnétique ambiant lors de leur formation.
- ▶ On attend des roches les plus vieilles qu'elles nous renseignent sur l'intensité du champ magnétique lors de la formation de notre système solaire. Ceci aide à discriminer différentes hypothèses sur le scénario physique qui a présidé à cette phase.
- ▶ On attend des roches terrestres un peu moins vieilles qu'elles nous renseignent sur la naissance et l'évolution d'un phénomène qui nous intéresse beaucoup : la géodynamo.

Pourquoi mesurer l'aimantation des roches ?

- ▶ Parce qu'elles sont potentiellement, nous l'avons dit, des mémoires du champ magnétique ambiant lors de leur formation.
- ▶ On attend des roches les plus vieilles qu'elles nous renseignent sur l'intensité du champ magnétique lors de la formation de notre système solaire. Ceci aide à discriminer différentes hypothèses sur le scénario physique qui a présidé à cette phase.
- ▶ On attend des roches terrestres un peu moins vieilles qu'elles nous renseignent sur la naissance et l'évolution d'un phénomène qui nous intéresse beaucoup : la géodynamo.
- ▶ On attend des roches venues d'autres planètes ou satellites qu'elles nous renseignent sur l'existence et l'évolution, présente ou passée, d'une géodynamo là d'où elles viennent.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.
- ▶ Les courants électriques, c'est-à-dire les déplacements de charges électriques, créent des champs magnétiques.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.
- ▶ Les courants électriques, c'est-à-dire les déplacements de charges électriques, créent des champs magnétiques. Ceci est modélisé par les équations de Maxwell.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.
- ▶ Les courants électriques, c'est-à-dire les déplacements de charges électriques, créent des champs magnétiques. Ceci est modélisé par les équations de Maxwell.
- ▶ Le cœur de notre planète est en fusion (on s'en aperçoit parfois) et il se meut sous l'effet de courants de convection (dûs aux différences de température entre la croûte terrestre et le cœur), peut-être aussi par l'entraînement de la rotation terrestre.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.
- ▶ Les courants électriques, c'est-à-dire les déplacements de charges électriques, créent des champs magnétiques. Ceci est modélisé par les équations de Maxwell.
- ▶ Le cœur de notre planète est en fusion (on s'en aperçoit parfois) et il se meut sous l'effet de courants de convection (dûs aux différences de température entre la croûte terrestre et le cœur), peut-être aussi par l'entraînement de la rotation terrestre.
- ▶ Le cœur est riche en éléments métalliques ionisés dont le mouvement crée un courant, donc un champ magnétique.

Qu'est-ce que la géodynamo ?

- ▶ C'est le mécanisme géologique qui engendre le champ magnétique terrestre.
- ▶ Les courants électriques, c'est-à-dire les déplacements de charges électriques, créent des champs magnétiques. Ceci est modélisé par les équations de Maxwell.
- ▶ Le cœur de notre planète est en fusion (on s'en aperçoit parfois) et il se meut sous l'effet de courants de convection (dûs aux différences de température entre la croûte terrestre et le cœur), peut-être aussi par l'entraînement de la rotation terrestre.
- ▶ Le cœur est riche en éléments métalliques ionisés dont le mouvement crée un courant, donc un champ magnétique. C'est lui qu'indique la boussole.

À quoi nous sert la géodynamo ?

À quoi nous sert la géodynamo ?

- ▶ À nous protéger des particules émises par le soleil, qui sont chargées (par exemple des protons issus de la réaction nucléaire dans le soleil) et donc déviées par le champ magnétique terrestre.

À quoi nous sert la géodynamo ?

- ▶ À nous protéger des particules émises par le soleil, qui sont chargées (par exemple des protons issus de la réaction nucléaire dans le soleil) et donc déviées par le champ magnétique terrestre.
- ▶ Cette protection est en fait peut-être double, car on pense que les particules solaires, non contentes de nous bombarder, pourraient arracher petit à petit notre atmosphère si elles n'étaient pas déviées.

À quoi nous sert la géodynamo ?

- ▶ À nous protéger des particules émises par le soleil, qui sont chargées (par exemple des protons issus de la réaction nucléaire dans le soleil) et donc déviées par le champ magnétique terrestre.
- ▶ Cette protection est en fait peut-être double, car on pense que les particules solaires, non contentes de nous bombarder, pourraient arracher petit à petit notre atmosphère si elles n'étaient pas déviées.
- ▶ On est assez sûrs qu'il y avait une géodynamo sur la Lune, et sur Mars, dont on ignore toutefois les mécanismes exacts.

À quoi nous sert la géodynamo ?

- ▶ À nous protéger des particules émises par le soleil, qui sont chargées (par exemple des protons issus de la réaction nucléaire dans le soleil) et donc déviées par le champ magnétique terrestre.
- ▶ Cette protection est en fait peut-être double, car on pense que les particules solaires, non contentes de nous bombarder, pourraient arracher petit à petit notre atmosphère si elles n'étaient pas déviées.
- ▶ On est assez sûrs qu'il y avait une géodynamo sur la Lune, et sur Mars, dont on ignore toutefois les mécanismes exacts.
- ▶ On se demande pourquoi il n'y en a plus.

À quoi nous sert la géodynamo ?

- ▶ À nous protéger des particules émises par le soleil, qui sont chargées (par exemple des protons issus de la réaction nucléaire dans le soleil) et donc déviées par le champ magnétique terrestre.
- ▶ Cette protection est en fait peut-être double, car on pense que les particules solaires, non contentes de nous bombarder, pourraient arracher petit à petit notre atmosphère si elles n'étaient pas déviées.
- ▶ On est assez sûrs qu'il y avait une géodynamo sur la Lune, et sur Mars, dont on ignore toutefois les mécanismes exacts.
- ▶ On se demande pourquoi il n'y en a plus. Petite inquiétude.

On nous avait promis la lune



Les inversions du champ

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.
- ▶ Au cours de l'inversion, on ne sait pas bien ce qui se passe, on ne sait pas bien non plus combien de temps cela prend.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.
- ▶ Au cours de l'inversion, on ne sait pas bien ce qui se passe, on ne sait pas bien non plus combien de temps cela prend.
- ▶ On pense qu'il peut y avoir plusieurs pôles nord et plusieurs pôles sud à certains stades, et que le champ peut faiblir.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.
- ▶ Au cours de l'inversion, on ne sait pas bien ce qui se passe, on ne sait pas bien non plus combien de temps cela prend.
- ▶ On pense qu'il peut y avoir plusieurs pôles nord et plusieurs pôles sud à certains stades, et que le champ peut faiblir.
- ▶ Actuellement les pôles se déplacent pas mal et le champ faiblit à certains endroits, on se demande si on entame une phase d'inversion.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.
- ▶ Au cours de l'inversion, on ne sait pas bien ce qui se passe, on ne sait pas bien non plus combien de temps cela prend.
- ▶ On pense qu'il peut y avoir plusieurs pôles nord et plusieurs pôles sud à certains stades, et que le champ peut faiblir.
- ▶ Actuellement les pôles se déplacent pas mal et le champ faiblit à certains endroits, on se demande si on entame une phase d'inversion.
- ▶ L'inquiétude reste modérée, car les zoologistes n'arrivent pas vraiment à corréler les inversions connues du champ avec des extinctions massives d'espèces.

Les inversions du champ

- ▶ L'analyse des sédiments, des stalactites et des stalagmites a convaincu les géologues que le champ magnétique terrestre s'est inversé des centaines de fois depuis la formation de la Terre. L'inversion signifie que les pôles nord et sud se déplacent jusqu'à s'échanger.
- ▶ Au cours de l'inversion, on ne sait pas bien ce qui se passe, on ne sait pas bien non plus combien de temps cela prend.
- ▶ On pense qu'il peut y avoir plusieurs pôles nord et plusieurs pôles sud à certains stades, et que le champ peut faiblir.
- ▶ Actuellement les pôles se déplacent pas mal et le champ faiblit à certains endroits, on se demande si on entame une phase d'inversion.
- ▶ L'inquiétude reste modérée, car les zoologistes n'arrivent pas vraiment à corréler les inversions connues du champ avec des extinctions massives d'espèces. On aimerait quand même savoir prédire les inversions.

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).
- ▶ La deuxième raison est qu'on ne mesure pas l'aimantation mais le champ magnétique qu'elle produit,

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).
- ▶ La deuxième raison est qu'on ne mesure pas l'aimantation mais le champ magnétique qu'elle produit, dans une direction donnée,

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).
- ▶ La deuxième raison est qu'on ne mesure pas l'aimantation mais le champ magnétique qu'elle produit, dans une direction donnée, et sur une petite portion d'espace.

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).
- ▶ La deuxième raison est qu'on ne mesure pas l'aimantation mais le champ magnétique qu'elle produit, dans une direction donnée, et sur une petite portion d'espace.
- ▶ Pour remonter du champ à l'aimantation (c'est-à-dire de l'effet à la cause), il faut résoudre un problème de Mathématiques Appliquées qu'on appelle Problème Inverse.

Pourquoi est-il dur de mesurer l'aimantation ?

- ▶ La première raison est que les aimantations des roches intéressantes sont souvent très faibles (de 10^{-9} à 10^{-12} Am²).
- ▶ Pour remédier à cela, les géologues ont construit ces dernières années des appareils d'une très grande sensibilité, les Superconducting Quantum Interference Devices (SQUID).
- ▶ La deuxième raison est qu'on ne mesure pas l'aimantation mais le champ magnétique qu'elle produit, dans une direction donnée, et sur une petite portion d'espace.
- ▶ Pour remonter du champ à l'aimantation (c'est-à-dire de l'effet à la cause), il faut résoudre un problème de Mathématiques Appliquées qu'on appelle Problème Inverse. C'est pour ça qu'on compte un peu sur nous.

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe).

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe). De façon générale, on perçoit un champ magnétique de manière indirecte, à travers ses effets électriques.

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe). De façon générale, on perçoit un champ magnétique de manière indirecte, à travers ses effets électriques.
- ▶ Comme un champ faible induit un courant faible aussi, on utilise des bobines supra-conductrices pour ne pas tout perdre sous forme de chaleur dans la résistance de la bobine.

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe). De façon générale, on perçoit un champ magnétique de manière indirecte, à travers ses effets électriques.
- ▶ Comme un champ faible induit un courant faible aussi, on utilise des bobines supra-conductrices pour ne pas tout perdre sous forme de chaleur dans la résistance de la bobine.
- ▶ Comme les matériaux supra-conducteurs doivent être très froids, on refroidit la bobine dans l'hélium liquide (-269° C).

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe). De façon générale, on perçoit un champ magnétique de manière indirecte, à travers ses effets électriques.
- ▶ Comme un champ faible induit un courant faible aussi, on utilise des bobines supra-conductrices pour ne pas tout perdre sous forme de chaleur dans la résistance de la bobine.
- ▶ Comme les matériaux supra-conducteurs doivent être très froids, on refroidit la bobine dans l'hélium liquide (-269° C).
- ▶ Il faut donc isoler la bobine par un dispositif étanche, ce qui oblige à l'éloigner un peu de l'échantillon de roche.

Comment mesure-t-on le champ magnétique ?

- ▶ En fait, on ne mesure pas le champ magnétique mais le courant électrique qu'il induit dans une bobine (ici on triche un peu, le fonctionnement du SQUID est plus complexe). De façon générale, on perçoit un champ magnétique de manière indirecte, à travers ses effets électriques.
- ▶ Comme un champ faible induit un courant faible aussi, on utilise des bobines supra-conductrices pour ne pas tout perdre sous forme de chaleur dans la résistance de la bobine.
- ▶ Comme les matériaux supra-conducteurs doivent être très froids, on refroidit la bobine dans l'hélium liquide (-269° C).
- ▶ Il faut donc isoler la bobine par un dispositif étanche, ce qui oblige à l'éloigner un peu de l'échantillon de roche. Ceci complique la résolution du problème inverse (moins on est près plus c'est dur).

Microscope SQUID



Support + capteur



Fenêtre en saphir

Quelques notations

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.
- ▶ La distance entre P et P' est notée $|P - P'|$.

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.
- ▶ La distance entre P et P' est notée $|P - P'|$.
- ▶ On appelle $\mathbf{M}(P')$ l'aimantation au point P' ;

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.
- ▶ La distance entre P et P' est notée $|P - P'|$.
- ▶ On appelle $\mathbf{M}(P')$ l'aimantation au point P' ; c'est un vecteur à trois composantes :

$$\mathbf{M}(P') = (m_1(P'), m_2(P'), m_3(P')).$$

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.
- ▶ La distance entre P et P' est notée $|P - P'|$.
- ▶ On appelle $\mathbf{M}(P')$ l'aimantation au point P' ; c'est un vecteur à trois composantes :

$$\mathbf{M}(P') = (m_1(P'), m_2(P'), m_3(P')).$$

- ▶ On appelle $\mathbf{B}(P)$ le champ magnétique au point P de l'espace ;

Quelques notations

- ▶ Un point P' de la roche est repéré par ses trois composantes :

$$P' = (p'_1, p'_2, p'_3).$$

- ▶ Un point P de l'espace (pas forcément de la roche) est aussi repéré par ses trois composantes : $P = (p_1, p_2, p_3)$.
- ▶ La distance entre P et P' est notée $|P - P'|$.
- ▶ On appelle $\mathbf{M}(P')$ l'aimantation au point P' ; c'est un vecteur à trois composantes :

$$\mathbf{M}(P') = (m_1(P'), m_2(P'), m_3(P')).$$

- ▶ On appelle $\mathbf{B}(P)$ le champ magnétique au point P de l'espace ; c'est un vecteur à trois composantes :

$$\mathbf{B}(P) = (B_x(P), B_y(P), B_z(P)).$$

Une équation générale

Une équation générale

- ▶ Avec ces notations, on peut écrire le champ $\mathbf{B}(P)$ au point P :

$$\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')(p_3 - p'_3)}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2 dp'_3$$

Une équation générale

- ▶ Avec ces notations, on peut écrire le champ $\mathbf{B}(P)$ au point P :

$$\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')(p_3 - p'_3)}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2 dp'_3$$

où le symbole ∇ indique que l'on calcule la liste à trois éléments des dérivées par rapport à p_1 , p_2 , et p_3 .

Une équation générale

- ▶ Avec ces notations, on peut écrire le champ $\mathbf{B}(P)$ au point P :

$$\nabla \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')(p_3 - p'_3)}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2 dp'_3}_{\Phi(P)}$$

où le symbole ∇ indique que l'on calcule la liste à trois éléments des dérivées par rapport à p_1 , p_2 , et p_3 .

- ▶ La quantité représentée par l'intégrale ci-dessus s'appelle le potentiel magnétique au point P . On la note $\Phi(P)$.

Une équation générale

- ▶ Avec ces notations, on peut écrire le champ $\mathbf{B}(P)$ au point P :

$$\nabla \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')(p_3 - p'_3)}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2 dp'_3}_{\Phi(P)}$$

où le symbole ∇ indique que l'on calcule la liste à trois éléments des dérivées par rapport à p_1 , p_2 , et p_3 .

- ▶ La quantité représentée par l'intégrale ci-dessus s'appelle le potentiel magnétique au point P . On la note $\Phi(P)$.
- ▶ L'équation signifie que

$$\mathbf{B} = (\partial_{p_1} \Phi, \partial_{p_2} \Phi, \partial_{p_3} \Phi).$$

Une équation générale

- ▶ Avec ces notations, on peut écrire le champ $\mathbf{B}(P)$ au point P :

$$\nabla \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')(p_3 - p'_3)}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2 dp'_3}_{\Phi(P)}$$

où le symbole ∇ indique que l'on calcule la liste à trois éléments des dérivées par rapport à p_1 , p_2 , et p_3 .

- ▶ La quantité représentée par l'intégrale ci-dessus s'appelle le potentiel magnétique au point P . On la note $\Phi(P)$.
- ▶ L'équation signifie que

$$\mathbf{B} = (\partial_{p_1} \Phi, \partial_{p_2} \Phi, \partial_{p_3} \Phi).$$

On dit que \mathbf{B} est le gradient de Φ .

Maxwell quasi-stationnaire

Maxwell quasi-stationnaire

- ▶ La formule est typique de ce que prédisent les équations de Maxwell sous l'hypothèse de *quasi-stationnarité*,

Maxwell quasi-stationnaire

- ▶ La formule est typique de ce que prédisent les équations de Maxwell sous l'hypothèse de *quasi-stationnarité*, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que les champs varient lentement avec le temps par rapport à la vitesse à laquelle l'information électromagnétique se propage dans l'espace.

Maxwell quasi-stationnaire

- ▶ La formule est typique de ce que prédisent les équations de Maxwell sous l'hypothèse de *quasi-stationnarité*, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que les champs varient lentement avec le temps par rapport à la vitesse à laquelle l'information électromagnétique se propage dans l'espace.
- ▶ Ce sont les mêmes équations, par exemple, qui gouvernent l'Electro-Encéphalographie (EEG).

Maxwell quasi-stationnaire

- ▶ La formule est typique de ce que prédisent les équations de Maxwell sous l'hypothèse de *quasi-stationnarité*, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que les champs varient lentement avec le temps par rapport à la vitesse à laquelle l'information électromagnétique se propage dans l'espace.
- ▶ Ce sont les mêmes équations, par exemple, qui gouvernent l'Electro-Encéphalographie (EEG).
- ▶ Ce qui distingue notre problème de l'EEG, et d'autres du même genre, c'est sa géométrie :

Maxwell quasi-stationnaire

- ▶ La formule est typique de ce que prédisent les équations de Maxwell sous l'hypothèse de *quasi-stationnarité*, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que les champs varient lentement avec le temps par rapport à la vitesse à laquelle l'information électromagnétique se propage dans l'espace.
- ▶ Ce sont les mêmes équations, par exemple, qui gouvernent l'Electro-Encéphalographie (EEG).
- ▶ Ce qui distingue notre problème de l'EEG, et d'autres du même genre, c'est sa géométrie : les roches sont découpées en plaques si fines qu'on les considère d'épaisseur nulle.

Schéma du dispositif

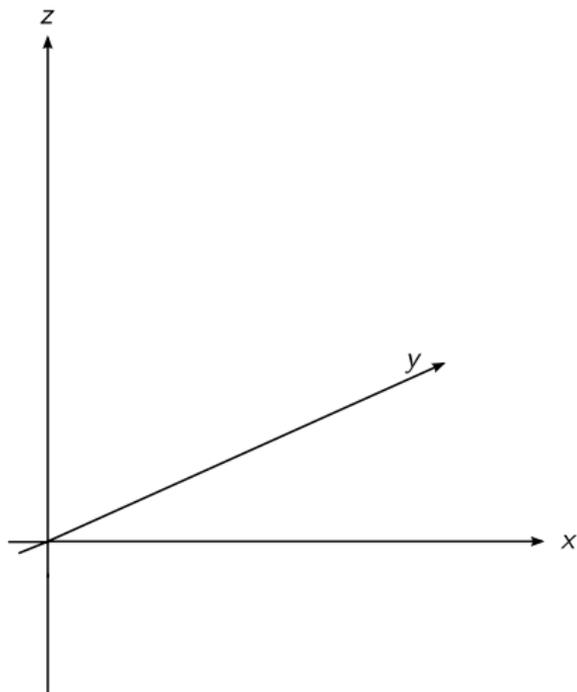


Schéma du dispositif

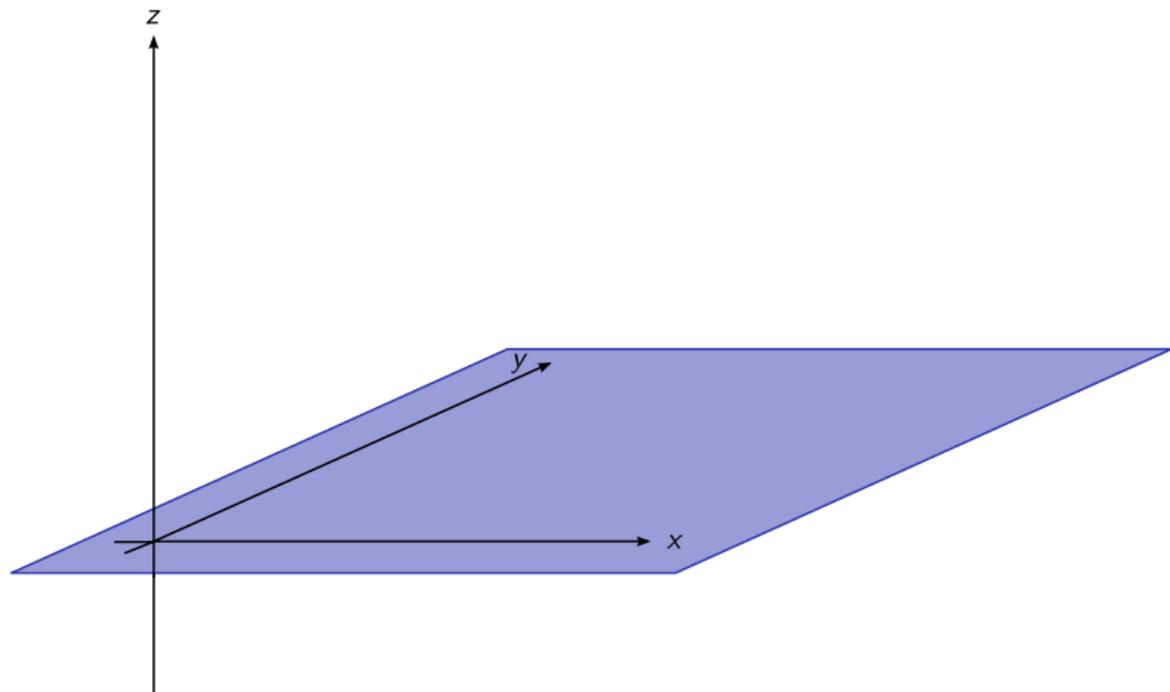


Schéma du dispositif

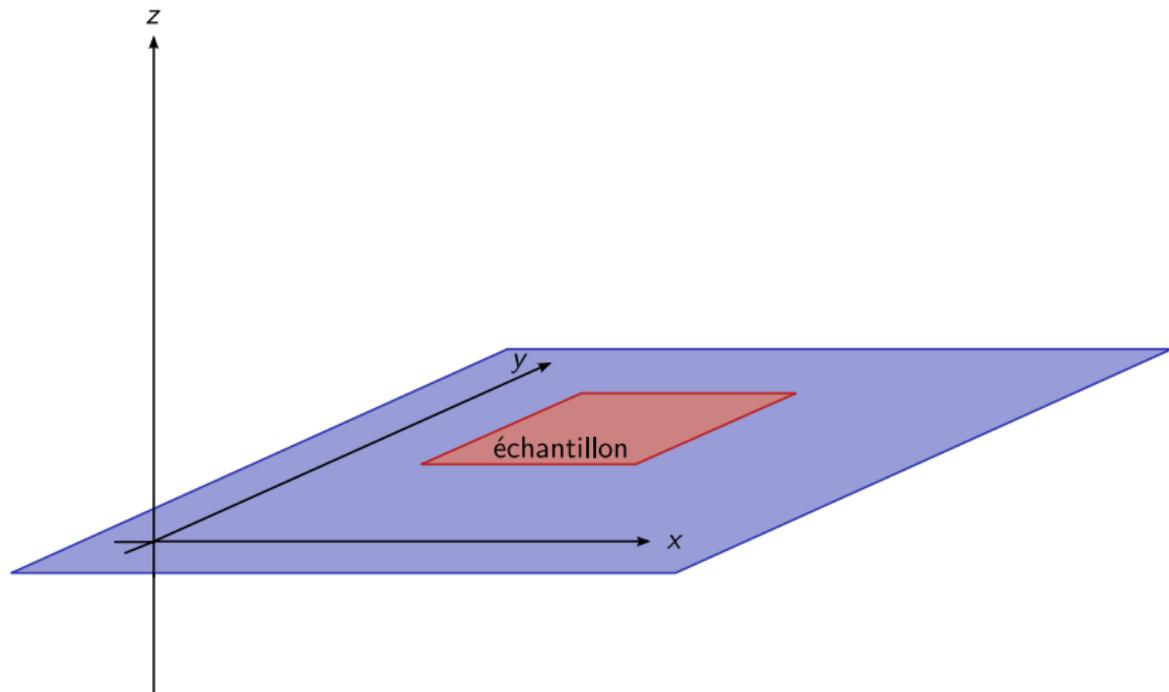


Schéma du dispositif

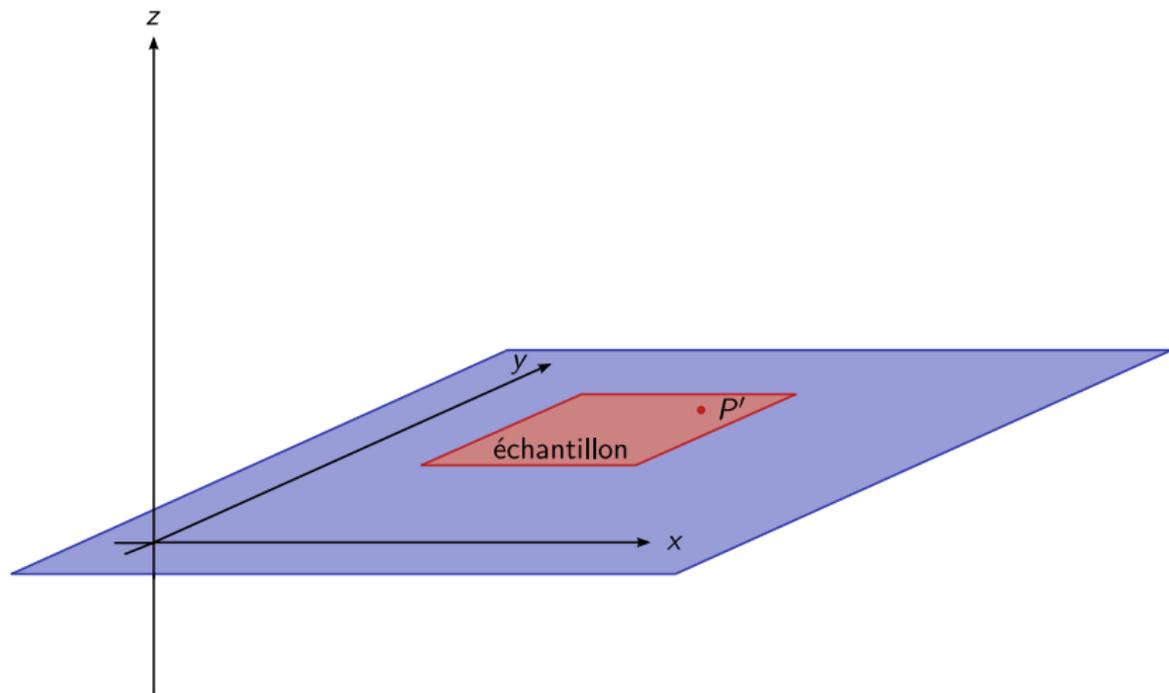


Schéma du dispositif

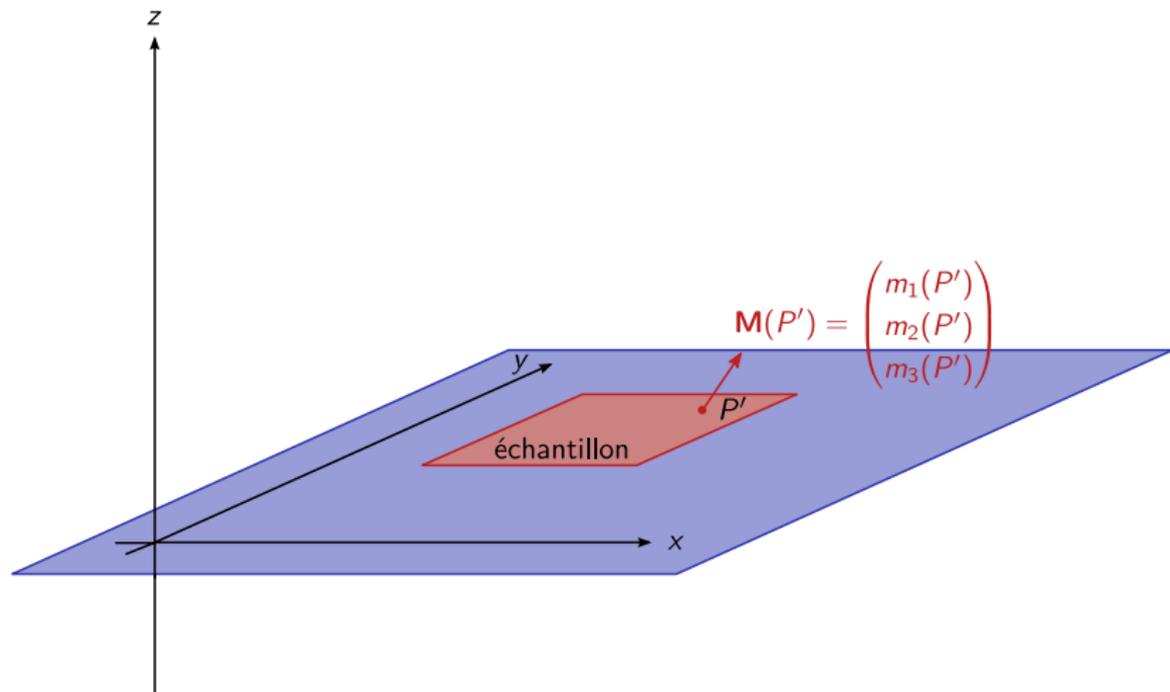


Schéma du dispositif

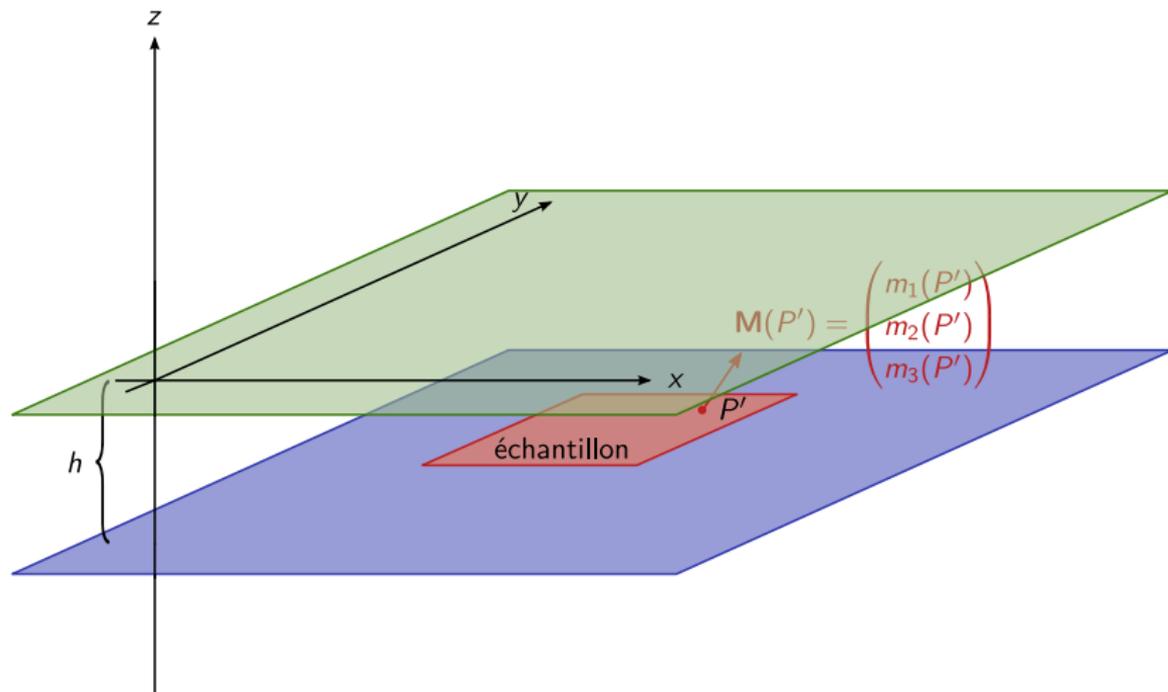
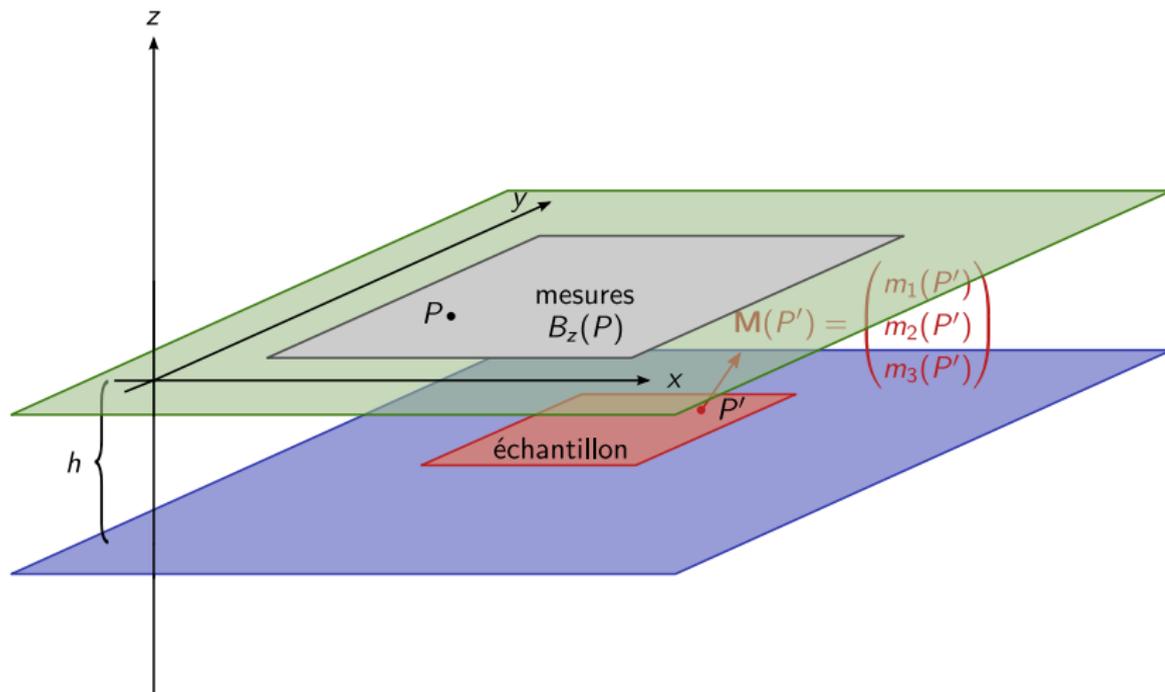


Schéma du dispositif



Le cas des plaques minces

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + \frac{m_3(P')p_3}{|P - P'|^3}}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2.$$

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + \frac{m_3(P')p_3}{|P - P'|^3}}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ Ces expressions sont bien connues des analystes.

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')p_3}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ Ces expressions sont bien connues des analystes. Mathématiquement, la formule entraîne que *le potentiel est l'extension harmonique, hors de la roche, de la fonction*

$$R_1(m_1)(P') + R_2(m_2)(P') + m_3(P')$$

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')p_3}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ Ces expressions sont bien connues des analystes. Mathématiquement, la formule entraîne que *le potentiel est l'extension harmonique, hors de la roche, de la fonction*

$$R_1(m_1)(P') + R_2(m_2)(P') + m_3(P')$$

où R_1, R_2 sont des opérateurs : les *transformations de Riesz*.

Le cas des plaques minces

- ▶ Si l'aimantation est contenue dans un plan qu'on peut supposer être à hauteur 0, le potentiel s'écrit :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{m_1(P')(p_1 - p'_1) + m_2(P')(p_2 - p'_2) + m_3(P')p_3}{|P - P'|^3} dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ Ces expressions sont bien connues des analystes. Mathématiquement, la formule entraîne que *le potentiel est l'extension harmonique, hors de la roche, de la fonction*

$$R_1(m_1)(P') + R_2(m_2)(P') + m_3(P')$$

où R_1, R_2 sont des opérateurs : les *transformations de Riesz*.

- ▶ L'extension harmonique a d'assez bonnes propriétés. Les transformations de Riesz sont plus délicates à manier.

Les sources silencieuses

Les sources silencieuses

- ▶ L'expression précédente permet de décrire les sources silencieuses, c'est-à-dire les aimantations qui produisent un champ nul.

Les sources silencieuses

- ▶ L'expression précédente permet de décrire les sources silencieuses, c'est-à-dire les aimantations qui produisent un champ nul.
- ▶ C'est la question initiale que se posaient nos collaborateurs géologues du MIT.

Les sources silencieuses

- ▶ L'expression précédente permet de décrire les sources silencieuses, c'est-à-dire les aimantations qui produisent un champ nul.
- ▶ C'est la question initiale que se posaient nos collaborateurs géologues du MIT.
- ▶ Comme les extensions harmoniques de deux fonctions distinctes le sont aussi (on dit que cette extension est injective), on voit que les sources silencieuses sont les aimantations pour lesquelles

$$R_1(m_1) + R_2(m_2) + m_3 = 0.$$

Les sources silencieuses (suite)

Les sources silencieuses (suite)

- ▶ Il y a beaucoup de sources silencieuses et on peut les décrire de façon détaillée.

Les sources silencieuses (suite)

- ▶ Il y a beaucoup de sources silencieuses et on peut les décrire de façon détaillée.
- ▶ Les seules qui s'étendent sur une surface finie du plan sont celles qui vérifient :

$$\partial_{x_1} m_1 + \partial_{x_2} m_2 = 0, \quad m_3 = 0$$

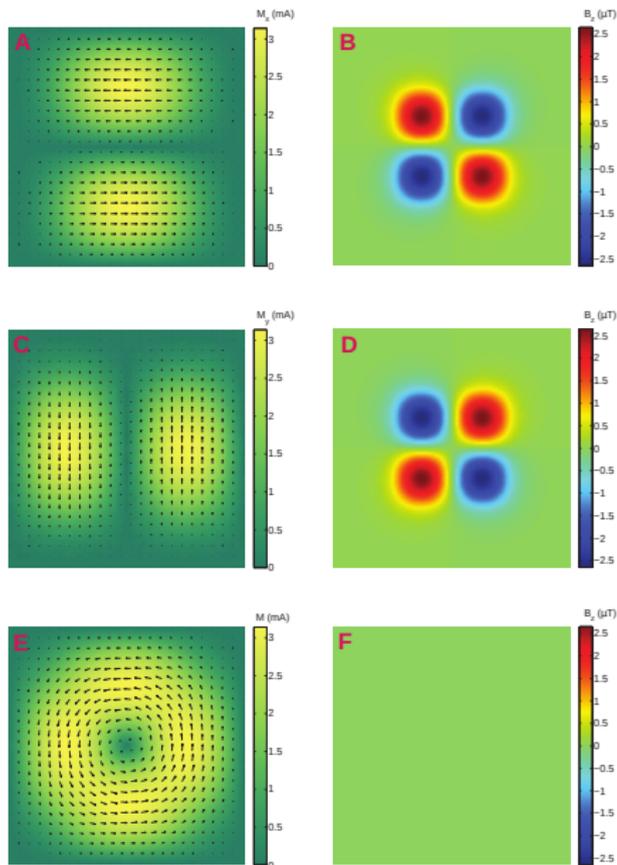
Les sources silencieuses (suite)

- ▶ Il y a beaucoup de sources silencieuses et on peut les décrire de façon détaillée.
- ▶ Les seules qui s'étendent sur une surface finie du plan sont celles qui vérifient :

$$\partial_{x_1} m_1 + \partial_{x_2} m_2 = 0, \quad m_3 = 0$$

(l'aimantation est horizontale et sa divergence est nulle).

Une source silencieuse



Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

- ▶ D'après ce qui précède, on ne peut pas retrouver une aimantation, connaissant le champ magnétique qu'elle engendre, sans faire d'hypothèse supplémentaire.

Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

- ▶ D'après ce qui précède, on ne peut pas retrouver une aimantation, connaissant le champ magnétique qu'elle engendre, sans faire d'hypothèse supplémentaire.
- ▶ Une hypothèse favorisée par les géologues est que l'aimantation a la même direction en chaque point (aimantation unidirectionnelle).

Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

- ▶ D'après ce qui précède, on ne peut pas retrouver une aimantation, connaissant le champ magnétique qu'elle engendre, sans faire d'hypothèse supplémentaire.
- ▶ Une hypothèse favorisée par les géologues est que l'aimantation a la même direction en chaque point (aimantation unidirectionnelle).
Ceci cadre avec la théorie de l'acquisition de l'aimantation en refroidissant dans un champ pratiquement constant (venant du soleil, ou de la géodynamo).

Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

- ▶ D'après ce qui précède, on ne peut pas retrouver une aimantation, connaissant le champ magnétique qu'elle engendre, sans faire d'hypothèse supplémentaire.
- ▶ Une hypothèse favorisée par les géologues est que l'aimantation a la même direction en chaque point (aimantation unidirectionnelle).
Ceci cadre avec la théorie de l'acquisition de l'aimantation en refroidissant dans un champ pratiquement constant (venant du soleil, ou de la géodynamo).
- ▶ Une autre hypothèse intéressante est que l'aimantation a ses directions contenues dans un plan (aimantation bidirectionnelle).

Reconstruire une aimantation : possible ou non ?

- ▶ D'après ce qui précède, on ne peut pas retrouver une aimantation, connaissant le champ magnétique qu'elle engendre, sans faire d'hypothèse supplémentaire.
- ▶ Une hypothèse favorisée par les géologues est que l'aimantation a la même direction en chaque point (aimantation unidirectionnelle).
Ceci cadre avec la théorie de l'acquisition de l'aimantation en refroidissant dans un champ pratiquement constant (venant du soleil, ou de la géodynamo).
- ▶ Une autre hypothèse intéressante est que l'aimantation a ses directions contenues dans un plan (aimantation bidirectionnelle). Ceci cadre avec une acquisition dans un champ constant (soleil), suivie d'une exposition à un autre champ (géodynamo).

En théorie : dans certains cas.

En théorie : dans certains cas.

- ▶ Les résultats précédents entraînent que :

En théorie : dans certains cas.

- ▶ Les résultats précédents entraînent que :
 - ▶ Une aimantation unidirectionnelle est uniquement définie par son champ si elle a son support de surface finie.

En théorie : dans certains cas.

- ▶ Les résultats précédents entraînent que :
 - ▶ Une aimantation unidirectionnelle est uniquement définie par son champ si elle a son support de surface finie.
 - ▶ Une aimantation bidirectionnelle est uniquement définie par son champ si elle a son support de surface finie et qu'elle n'est pas horizontale.

En théorie : dans certains cas.

- ▶ Les résultats précédents entraînent que :
 - ▶ Une aimantation unidirectionnelle est uniquement définie par son champ si elle a son support de surface finie.
 - ▶ Une aimantation bidirectionnelle est uniquement définie par son champ si elle a son support de surface finie et qu'elle n'est pas horizontale.
- ▶ Ces résultats intéressent les géologues.

Et en pratique ?

Et en pratique ?

- ▶ Ce qui précède nous a appris que l'information dont on dispose quant au support de l'aimantation est cruciale pour pouvoir la déduire du champ.

Et en pratique ?

- ▶ Ce qui précède nous a appris que l'information dont on dispose quant au support de l'aimantation est cruciale pour pouvoir la déduire du champ.
- ▶ Le fait qu'il y ait beaucoup de sources silencieuses à support infini (mêmes unidirectionnelles) montre intuitivement que le problème est numériquement assez mal posé.

Et en pratique ?

- ▶ Ce qui précède nous a appris que l'information dont on dispose quant au support de l'aimantation est cruciale pour pouvoir la déduire du champ.
- ▶ Le fait qu'il y ait beaucoup de sources silencieuses à support infini (mêmes unidirectionnelles) montre intuitivement que le problème est numériquement assez mal posé. En effet, lorsqu'on s'approche tout près de l'échantillon, celui-ci paraît très étendu (à la limite il est infiniment grand).

Et en pratique ?

- ▶ Ce qui précède nous a appris que l'information dont on dispose quant au support de l'aimantation est cruciale pour pouvoir la déduire du champ.
- ▶ Le fait qu'il y ait beaucoup de sources silencieuses à support infini (mêmes unidirectionnelles) montre intuitivement que le problème est numériquement assez mal posé. En effet, lorsqu'on s'approche tout près de l'échantillon, celui-ci paraît très étendu (à la limite il est infiniment grand).
- ▶ De plus, certaines méthodes classiques fondées sur la transformation de Fourier perdent plus ou moins trace du support de l'aimantation.

Et en pratique ?

- ▶ Ce qui précède nous a appris que l'information dont on dispose quant au support de l'aimantation est cruciale pour pouvoir la déduire du champ.
- ▶ Le fait qu'il y ait beaucoup de sources silencieuses à support infini (mêmes unidirectionnelles) montre intuitivement que le problème est numériquement assez mal posé. En effet, lorsqu'on s'approche tout près de l'échantillon, celui-ci paraît très étendu (à la limite il est infiniment grand).
- ▶ De plus, certaines méthodes classiques fondées sur la transformation de Fourier perdent plus ou moins trace du support de l'aimantation. C'est regrettable car elles permettent de calculer vite.

Le moment

Le moment

- ▶ Une quantité importante pour les géologues est le moment total de l'échantillon :

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(P') dp'_1 dp'_2.$$

Le moment

- ▶ Une quantité importante pour les géologues est le moment total de l'échantillon :

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(P') dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ D'autres moments, localisés sur certaines régions de l'échantillon sont intéressants aussi.

Le moment

- ▶ Une quantité importante pour les géologues est le moment total de l'échantillon :

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(P') dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ D'autres moments, localisés sur certaines régions de l'échantillon sont intéressants aussi.
- ▶ Le moment est bien défini par le champ, car il ne dépend pas de l'aimantation pourvu qu'elle engendre le bon champ.

Le moment

- ▶ Une quantité importante pour les géologues est le moment total de l'échantillon :

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(P') dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ D'autres moments, localisés sur certaines régions de l'échantillon sont intéressants aussi.
- ▶ Le moment est bien défini par le champ, car il ne dépend pas de l'aimantation pourvu qu'elle engendre le bon champ. En effet, les sources silencieuses ont un moment nul.

Le moment

- ▶ Une quantité importante pour les géologues est le moment total de l'échantillon :

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(P') dp'_1 dp'_2.$$

- ▶ D'autres moments, localisés sur certaines régions de l'échantillon sont intéressants aussi.
- ▶ Le moment est bien défini par le champ, car il ne dépend pas de l'aimantation pourvu qu'elle engendre le bon champ. En effet, les sources silencieuses ont un moment nul.
- ▶ On peut dans un premier temps s'intéresser au calcul du moment.

Magnétométrie

Magnétométrie

- ▶ Depuis longtemps, les géologues mesurent les moments d'échantillons de roche à l'aide d'instruments nommés magnétomètres.

Magnétométrie

- ▶ Depuis longtemps, les géologues mesurent les moments d'échantillons de roche à l'aide d'instruments nommés magnétomètres.
- ▶ Un magnétomètre mesure assez loin de l'échantillon pour que celui-ci puisse être assimilé à un dipôle.

Magnétométrie

- ▶ Depuis longtemps, les géologues mesurent les moments d'échantillons de roche à l'aide d'instruments nommés magnétomètres.
- ▶ Un magnétomètre mesure assez loin de l'échantillon pour que celui-ci puisse être assimilé à un dipôle. Un dipôle est une aimantation localisée en un point (une distribution de Dirac).

Magnétométrie

- ▶ Depuis longtemps, les géologues mesurent les moments d'échantillons de roche à l'aide d'instruments nommés magnétomètres.
- ▶ Un magnétomètre mesure assez loin de l'échantillon pour que celui-ci puisse être assimilé à un dipôle. Un dipôle est une aimantation localisée en un point (une distribution de Dirac).
- ▶ Les échantillons doivent donc être assez aimantés pour que le champ soit suffisamment grand pour être détecté lorsqu'on est un peu éloigné.

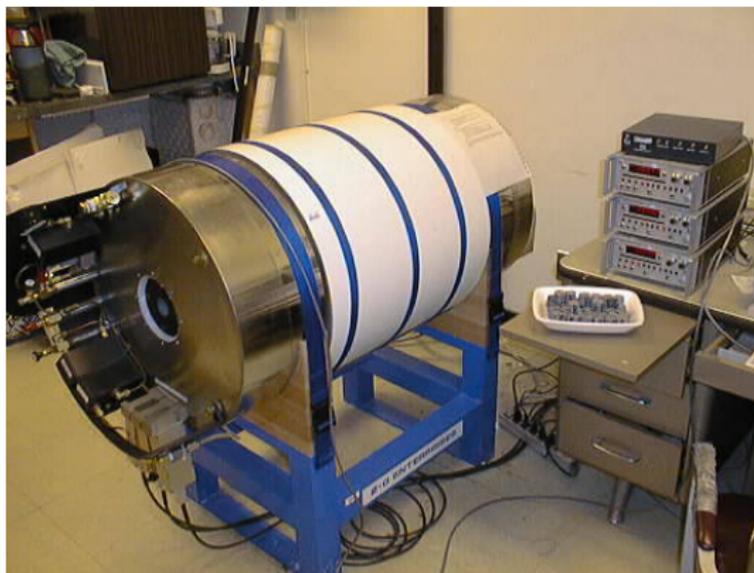
Magnétométrie

- ▶ Depuis longtemps, les géologues mesurent les moments d'échantillons de roche à l'aide d'instruments nommés magnétomètres.
- ▶ Un magnétomètre mesure assez loin de l'échantillon pour que celui-ci puisse être assimilé à un dipôle. Un dipôle est une aimantation localisée en un point (une distribution de Dirac).
- ▶ Les échantillons doivent donc être assez aimantés pour que le champ soit suffisamment grand pour être détecté lorsqu'on est un peu éloigné.
- ▶ Un autre défaut du magnétomètre est qu'il mesure souvent le moment de l'échantillon additionné de celui d'autres objets situés à proximité.

Instrument de mesure

Un magnétomètre mesure le moment total d'un échantillon :

$$\iiint_{\text{rocher}} \mathbf{M}(P') dP'.$$



Une approche brutale

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout (le monde numérique).

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout (le monde numérique).
- ▶ Pour cela on paramètre l'aimantation inconnue comme une somme de N dipôles élémentaires ayant des moments inconnus $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N$, et situés en des points P'_1, \dots, P'_N fixés d'une grille imaginaire située sur l'échantillon.

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout (le monde numérique).
- ▶ Pour cela on paramètre l'aimantation inconnue comme une somme de N dipôles élémentaires ayant des moments inconnus $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N$, et situés en des points P'_1, \dots, P'_N fixés d'une grille imaginaire située sur l'échantillon.
- ▶ On peut calculer le champ vertical d'un dipôle élémentaire simplement.

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout (le monde numérique).
- ▶ Pour cela on paramètre l'aimantation inconnue comme une somme de N dipôles élémentaires ayant des moments inconnus $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N$, et situés en des points P'_1, \dots, P'_N fixés d'une grille imaginaire située sur l'échantillon.
- ▶ Plus précisément, on $B_z(P)$ est donné par

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N 3p_3 \frac{[\mathbf{M}_j]_1(p_1 - [P'_j]_1) + [\mathbf{M}_j]_2(p_2 - [P'_j]_2) + [\mathbf{M}_j]_3 p_3}{|P - P'_j|^5} - \frac{[\mathbf{M}_j]_3}{|P - P'_j|^3}.$$

Une approche brutale

- ▶ On discrétise tout (le monde numérique).
- ▶ Pour cela on paramètre l'aimantation inconnue comme une somme de N dipôles élémentaires ayant des moments inconnus $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N$, et situés en des points P'_1, \dots, P'_N fixés d'une grille imaginaire située sur l'échantillon.
- ▶ Plus précisément, on $B_z(P)$ est donné par

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N 3p_3 \frac{[\mathbf{M}_j]_1(p_1 - [P'_j]_1) + [\mathbf{M}_j]_2(p_2 - [P'_j]_2) + [\mathbf{M}_j]_3 p_3}{|P - P'_j|^5} - \frac{[\mathbf{M}_j]_3}{|P - P'_j|^3}.$$

- ▶ D'autres aimantations élémentaires que des dipôles peuvent être (et sont) utilisées.

Une approche brutale (suite)

Une approche brutale (suite)

- ▶ On cherche ensuite quels M_j minimisent la quantité :

$$|B_z(P_1) - B_{mes}(P_1)|^2 + \dots + |B_z(P_N) - B_{mes}(P_N)|^2$$

Une approche brutale (suite)

- ▶ On cherche ensuite quels M_j minimisent la quantité :

$$|B_z(P_1) - B_{mes}(P_1)|^2 + \dots + |B_z(P_N) - B_{mes}(P_N)|^2$$

où les B_{mes} sont les composantes verticales du champ magnétique mesurées aux points P_1, \dots, P_N d'une grille située à la hauteur h au dessus de la grille P'_1, \dots, P'_N .

Une approche brutale (suite)

- ▶ On cherche ensuite quels M_j minimisent la quantité :

$$|B_z(P_1) - B_{mes}(P_1)|^2 + \dots + |B_z(P_N) - B_{mes}(P_N)|^2$$

où les B_{mes} sont les composantes verticales du champ magnétique mesurées aux points P_1, \dots, P_N d'une grille située à la hauteur h au dessus de la grille P'_1, \dots, P'_N .

- ▶ C'est un problème linéaire, le calcul est donc en théorie facile.

Une approche brutale (suite)

- ▶ On cherche ensuite quels M_j minimisent la quantité :

$$|B_z(P_1) - B_{mes}(P_1)|^2 + \dots + |B_z(P_N) - B_{mes}(P_N)|^2$$

où les B_{mes} sont les composantes verticales du champ magnétique mesurées aux points P_1, \dots, P_N d'une grille située à la hauteur h au dessus de la grille P'_1, \dots, P'_N .

- ▶ C'est un problème linéaire, le calcul est donc en théorie facile.
- ▶ En réalité il y a trop de paramètres, on utilise généralement moins de dipôles que de points de mesure. Dans tous les cas les calculs sont lourds et parfois imprécis (mais classiques).

Sources unilatérales

Sources unilatérales

- ▶ Lorsque le processus précédent donne une bonne approximation du champ mesuré (en mettant assez de dipôles dans le modèle on y arrive en général),

Sources unilatérales

- ▶ Lorsque le processus précédent donne une bonne approximation du champ mesuré (en mettant assez de dipôles dans le modèle on y arrive en général), il est naturel d'espérer que l'on pourra estimer le moment convenablement par celui du modèle.

Sources unilatérales

- ▶ Lorsque le processus précédent donne une bonne approximation du champ mesuré (en mettant assez de dipôles dans le modèle on y arrive en général), il est naturel d'espérer que l'on pourra estimer le moment convenablement par celui du modèle.
- ▶ De manière un peu inattendue, ce n'est pas toujours le cas.

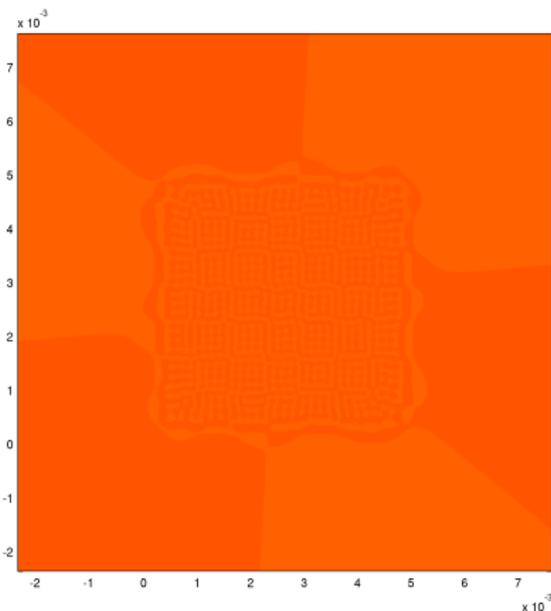
Sources unilatérales

- ▶ Lorsque le processus précédent donne une bonne approximation du champ mesuré (en mettant assez de dipôles dans le modèle on y arrive en général), il est naturel d'espérer que l'on pourra estimer le moment convenablement par celui du modèle.
- ▶ De manière un peu inattendue, ce n'est pas toujours le cas. La responsabilité en incombe à des distributions de dipôles presque silencieuses depuis le dessus mais non depuis le dessous de l'échantillon.

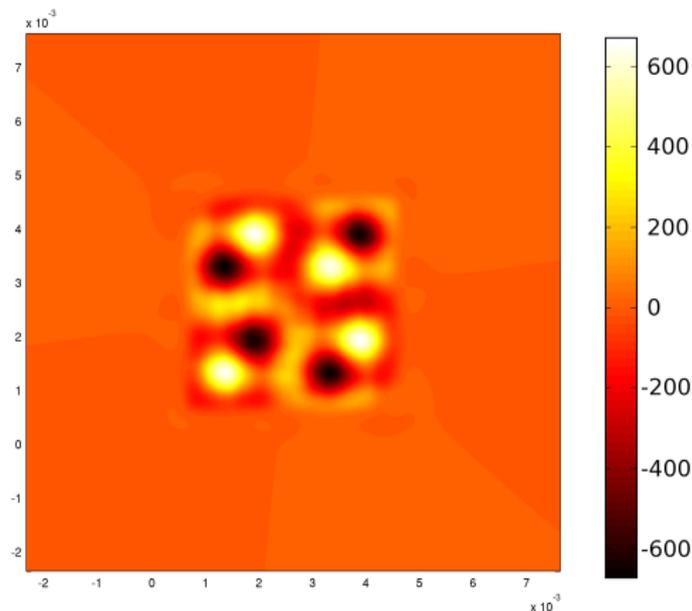
Sources unilatérales

- ▶ Lorsque le processus précédent donne une bonne approximation du champ mesuré (en mettant assez de dipôles dans le modèle on y arrive en général), il est naturel d'espérer que l'on pourra estimer le moment convenablement par celui du modèle.
- ▶ De manière un peu inattendue, ce n'est pas toujours le cas. La responsabilité en incombe à des distributions de dipôles presque silencieuses depuis le dessus mais non depuis le dessous de l'échantillon.
- ▶ Ci-après, nous montrons un exemple.

Source silencieuse d'un seul côté



B_z mesuré à hauteur $h = 270 \mu\text{m}$



B_z mesuré à hauteur $h = -270 \mu\text{m}$

Champ produit par une grille de 28×28 carrés uniformément magnétisés.

Un procédé de régularisation

Un procédé de régularisation

- ▶ La résolution de chaque problème inverse ou presque dépend d'une technique qui, en un sens, limite le champ des paramètres pour diminuer la variance des résultats.

Un procédé de régularisation

- ▶ La résolution de chaque problème inverse ou presque dépend d'une technique qui, en un sens, limite le champ des paramètres pour diminuer la variance des résultats. Ce procédé s'appelle *régularisation*.

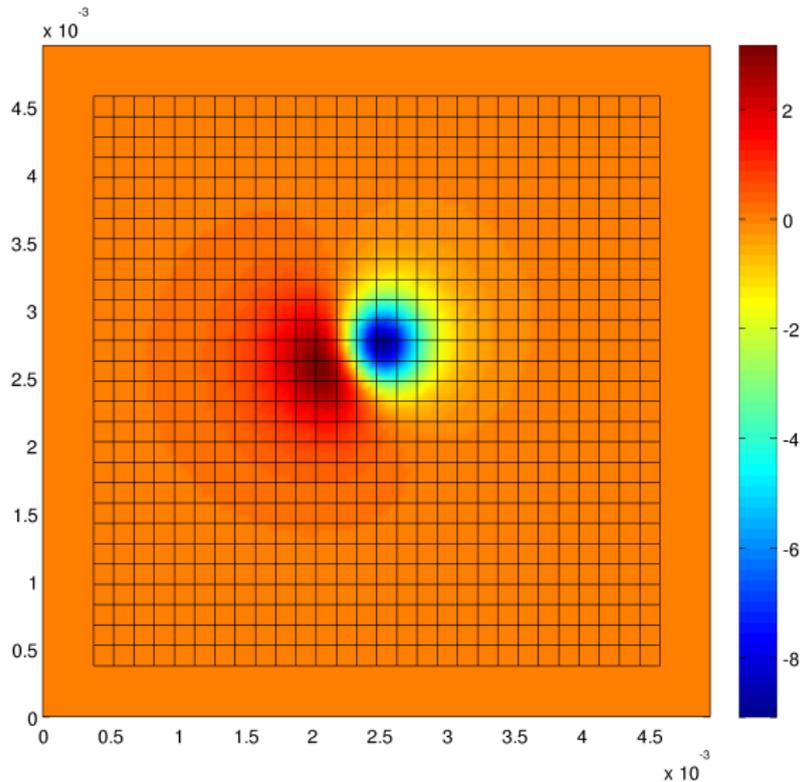
Un procédé de régularisation

- ▶ La résolution de chaque problème inverse ou presque dépend d'une technique qui, en un sens, limite le champ des paramètres pour diminuer la variance des résultats. Ce procédé s'appelle *régularisation*.
- ▶ On met en place ici une régularisation simple, qui consiste à déterminer les \mathbf{M}_j comme précédemment, puis supprimer ceux d'entre eux dont la taille est faible par rapport aux autres (disons moins de 10% de la taille maximum). Ensuite on itère l'opération.

Un procédé de régularisation

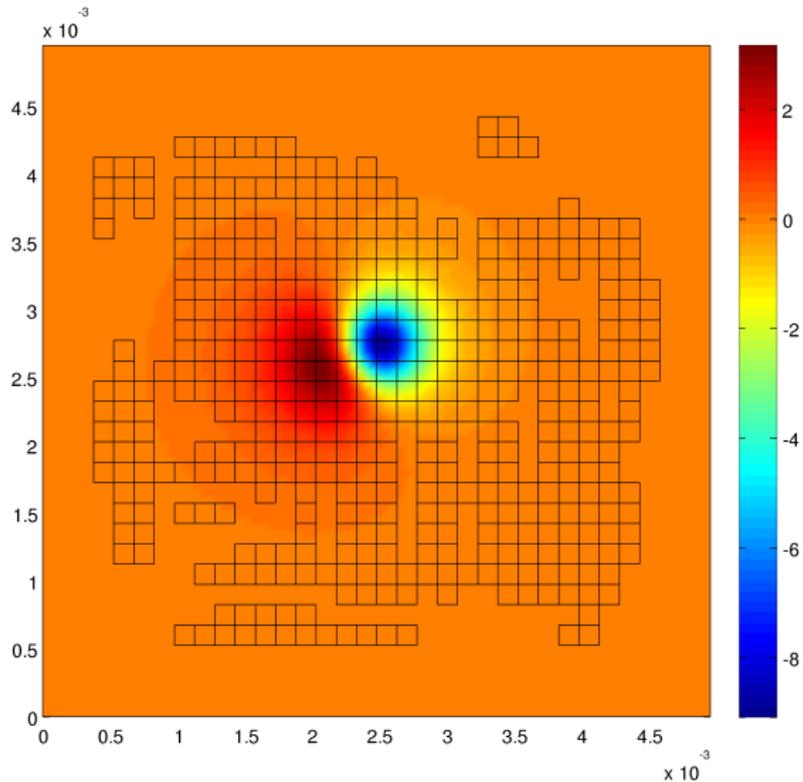
- ▶ La résolution de chaque problème inverse ou presque dépend d'une technique qui, en un sens, limite le champ des paramètres pour diminuer la variance des résultats. Ce procédé s'appelle *régularisation*.
- ▶ On met en place ici une régularisation simple, qui consiste à déterminer les \mathbf{M}_j comme précédemment, puis supprimer ceux d'entre eux dont la taille est faible par rapport aux autres (disons moins de 10% de la taille maximum). Ensuite on itère l'opération.
- ▶ On illustre le procédé, et la stabilisation du moment qui s'ensuit, sur un exemple de sphérule mesuré par nos collègues géologues. On le compare dans le même temps à l'angle du moment mesuré par le magnétomètre et celui obtenu par une méthode d'inversion rudimentaire.

Une approche moins brutale



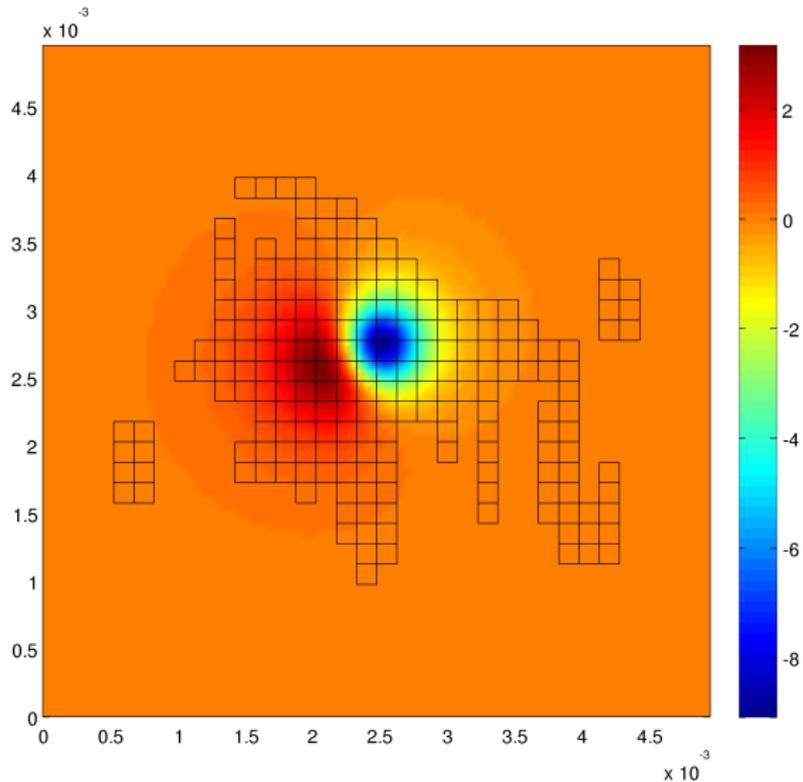
Itération 1

Une approche moins brutale



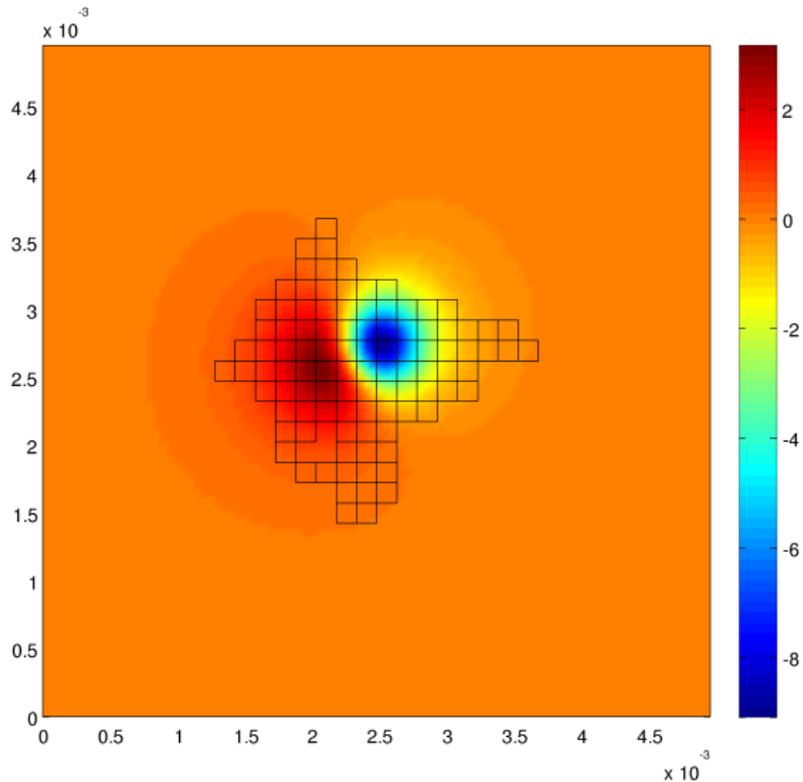
Itération 2

Une approche moins brutale



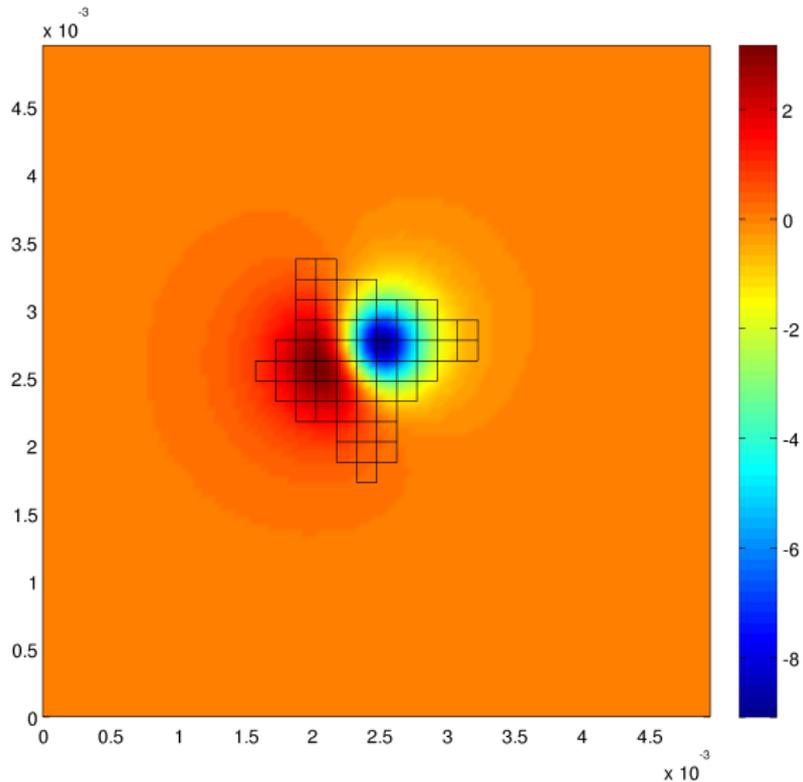
Itération 3

Une approche moins brutale



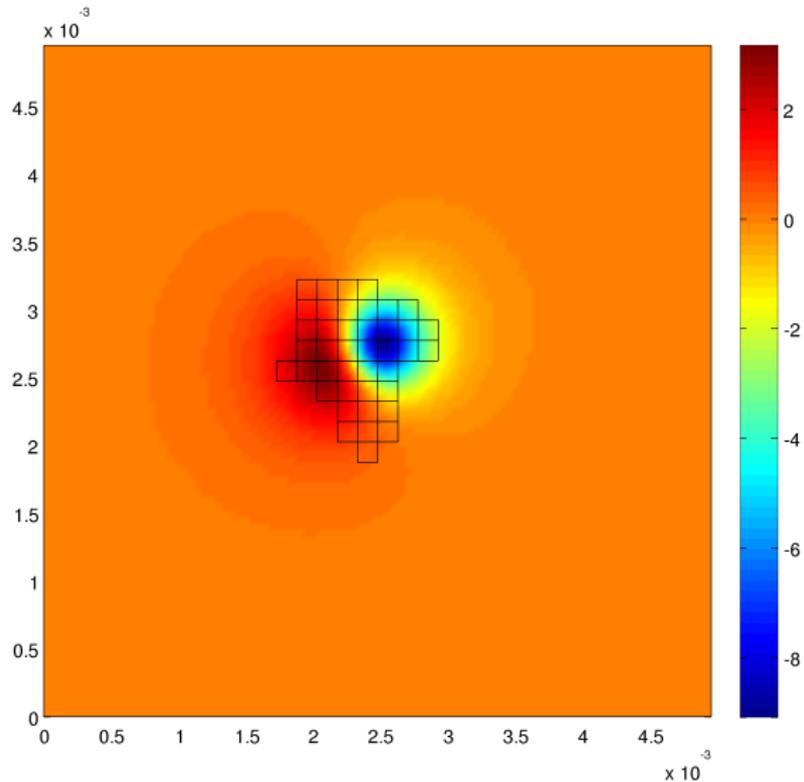
Itération 4

Une approche moins brutale



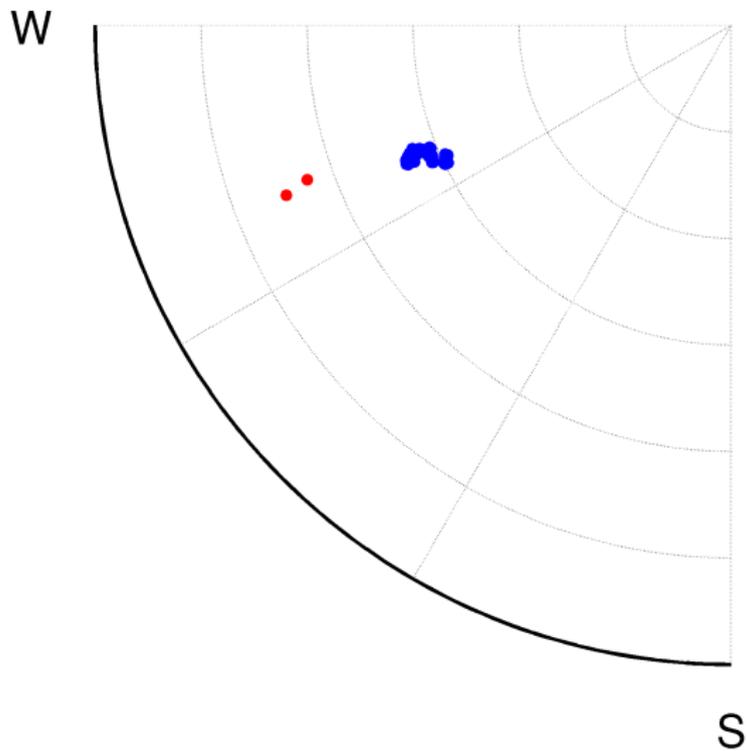
Itération 5

Une approche moins brutale



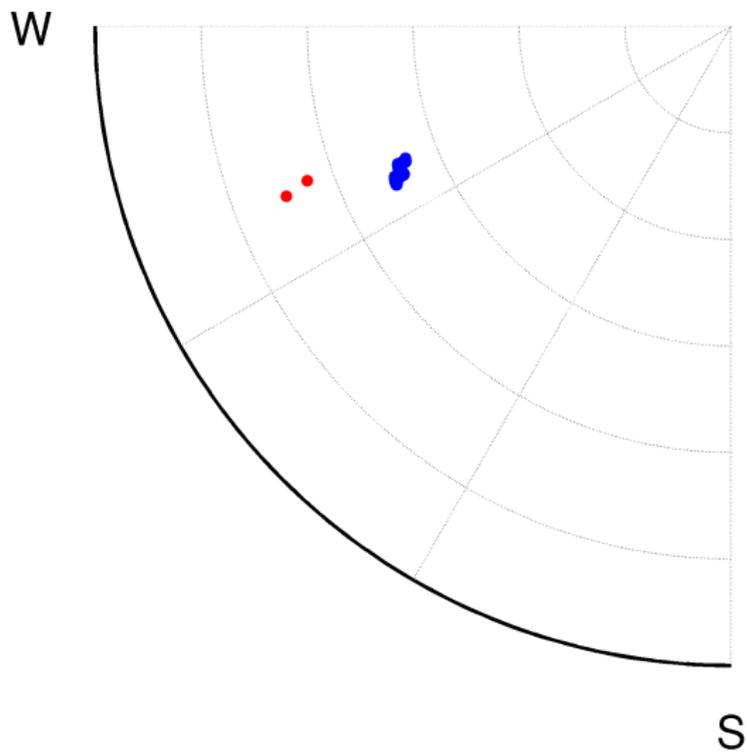
Itération 6

Évolution de l'angle du moment



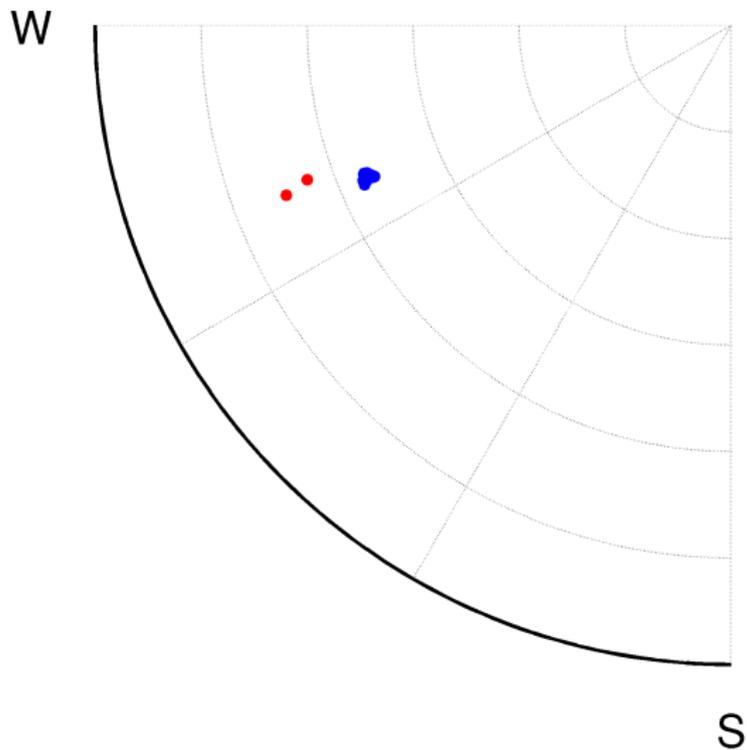
Itération 1

Évolution de l'angle du moment



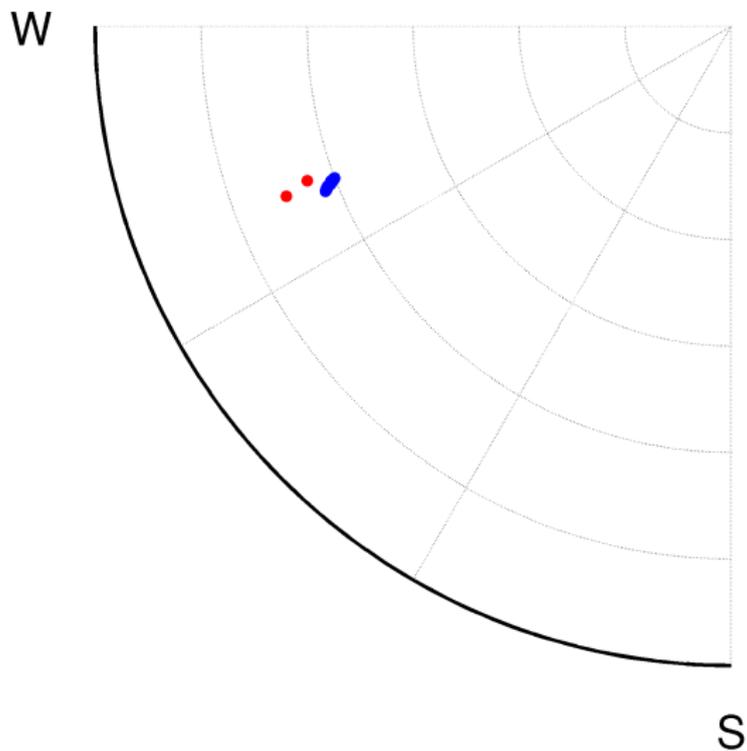
Itération 2

Évolution de l'angle du moment



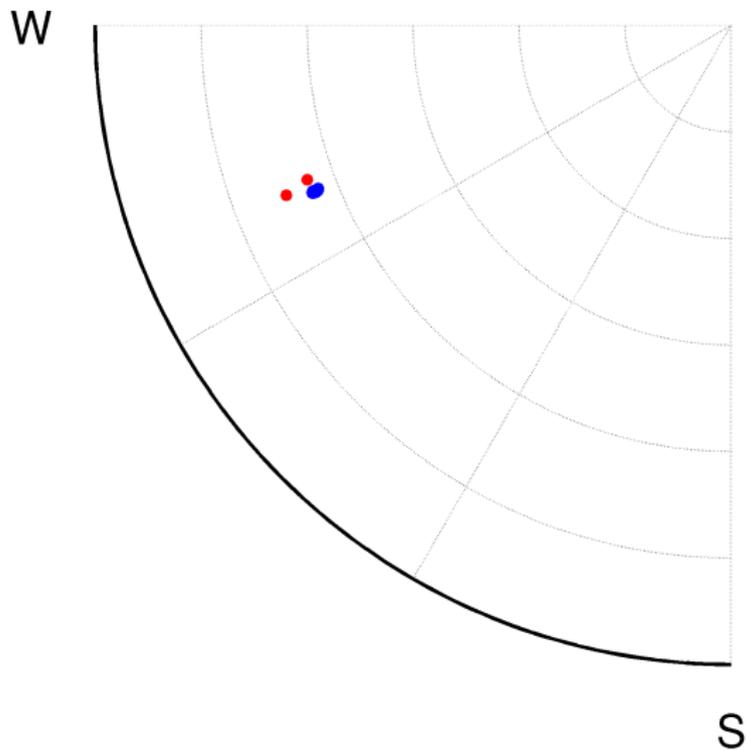
Itération 3

Évolution de l'angle du moment



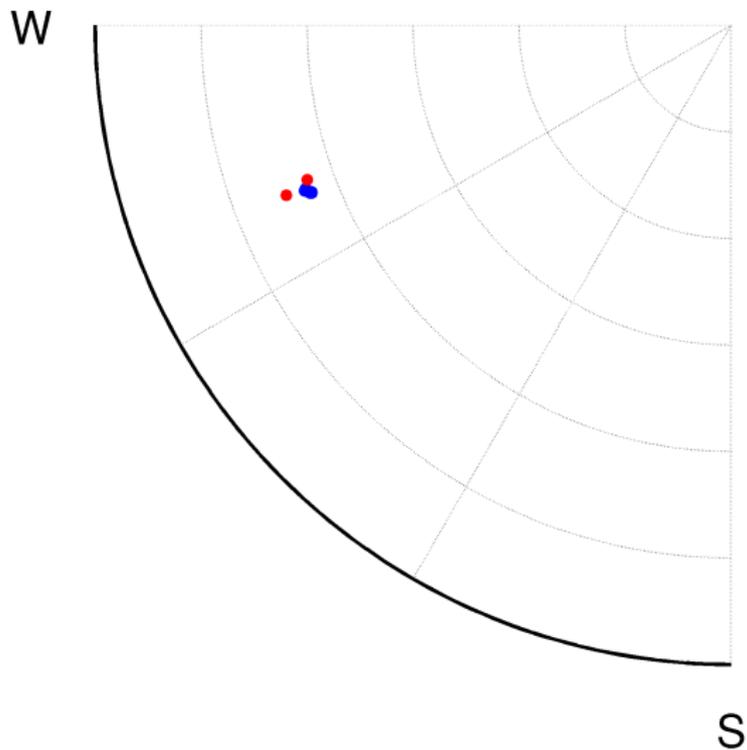
Itération 4

Évolution de l'angle du moment



Itération 5

Évolution de l'angle du moment



Itération 6

Morale

- ▶ Cette régularisation simple semble marcher assez bien pour retrouver le moment lorsque le support de l'aimantation est localisé.

- ▶ Cette régularisation simple semble marcher assez bien pour retrouver le moment lorsque le support de l'aimantation est localisé. Notons que l'aimantation reconstruite n'a généralement guère à voir avec la vraie.

- ▶ Cette régularisation simple semble marcher assez bien pour retrouver le moment lorsque le support de l'aimantation est localisé. Notons que l'aimantation reconstruite n'a généralement guère à voir avec la vraie.
- ▶ Il y a des cas, cependant, où on ne peut pas réduire le support de façon aussi simple sans dégrader la reproduction du champ, qui est le critère de qualité (l'attache aux données).

- ▶ Cette régularisation simple semble marcher assez bien pour retrouver le moment lorsque le support de l'aimantation est localisé. Notons que l'aimantation reconstruite n'a généralement guère à voir avec la vraie.
- ▶ Il y a des cas, cependant, où on ne peut pas réduire le support de façon aussi simple sans dégrader la reproduction du champ, qui est le critère de qualité (l'attache aux données).

Un exemple au comportement différent

Un exemple au comportement différent

- ▶ On montre ci-après un exemple de reconstruction de l'aimantation d'un basalte hawaïen.

Un exemple au comportement différent

- ▶ On montre ci-après un exemple de reconstruction de l'aimantation d'un basalte hawaïen.
- ▶ Le support n'est pas localisé et le procédé précédent ne marche pas.

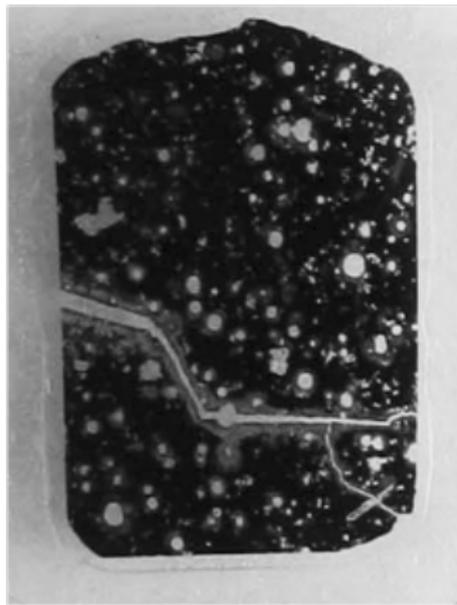
Un exemple au comportement différent

- ▶ On montre ci-après un exemple de reconstruction de l'aimantation d'un basalte hawaïen.
- ▶ Le support n'est pas localisé et le procédé précédent ne marche pas.
- ▶ On reconstruit correctement l'aimantation en trichant : nos collègues géologues l'ont aimanté artificiellement, et on connaît la direction.

Un exemple au comportement différent

- ▶ On montre ci-après un exemple de reconstruction de l'aimantation d'un basalte hawaïen.
- ▶ Le support n'est pas localisé et le procédé précédent ne marche pas.
- ▶ On reconstruit correctement l'aimantation en trichant : nos collègues géologues l'ont aimanté artificiellement, et on connaît la direction.
- ▶ Il est néanmoins instructif de voir comment la reconstruction se dégrade si on néglige l'information d'unidirectionnalité (ce qui augmente le nombre de paramètres et oblige à simplifier le modèle) ou si on se trompe un peu (exprès) sur cette direction.

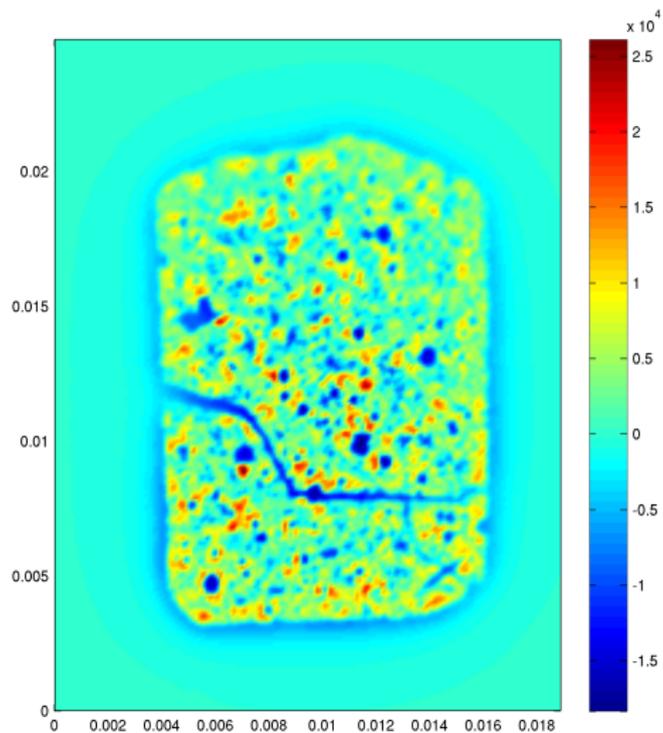
L'exemple du Basalte



3mm

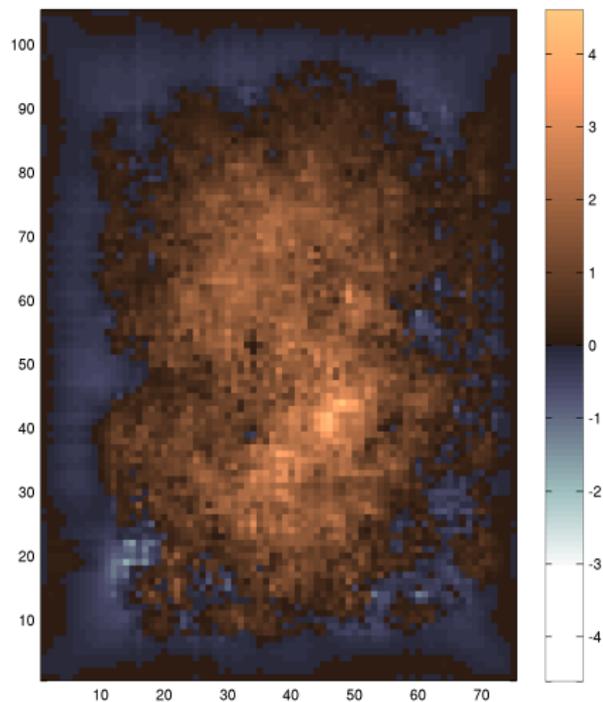
Photographie d'un basalte hawaïen

L'exemple du Basalte



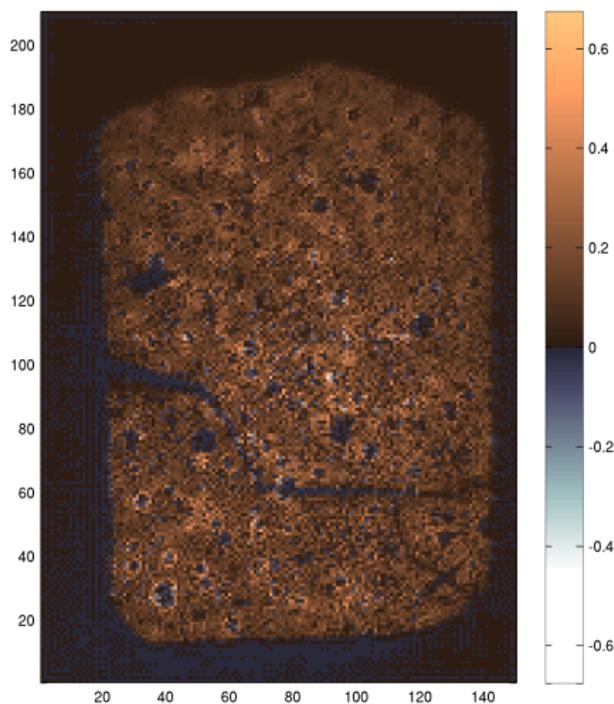
Champ B_z mesuré

L'exemple du Basalte



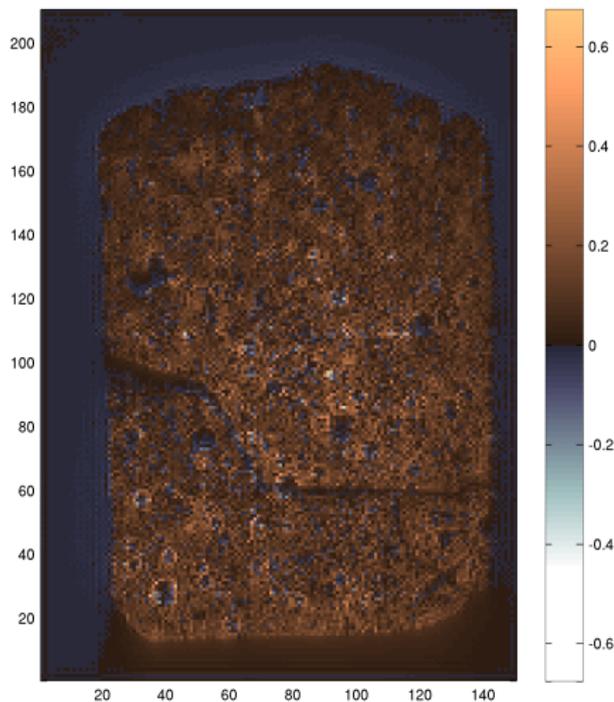
Composante verticale de la magnétisation reconstruite

L'exemple du Basalte



Magnétisation unidirectionnelle reconstruite (direction correcte)

L'exemple du Basalte



Magnétisation unidirectionnelle reconstruite (mauvaise direction)

Au futur

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.
- ▶ On cherche d'autre part des formules pour le moment à partir du champ (sans reconstruire d'aimantation équivalente) qui marcheraient dans des cas semi-localisés.

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.
- ▶ On cherche d'autre part des formules pour le moment à partir du champ (sans reconstruire d'aimantation équivalente) qui marcheraient dans des cas semi-localisés.
- ▶ Enfin on réfléchit à des régularisations plus subtiles.

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.
- ▶ On cherche d'autre part des formules pour le moment à partir du champ (sans reconstruire d'aimantation équivalente) qui marcheraient dans des cas semi-localisés.
- ▶ Enfin on réfléchit à des régularisations plus subtiles. On sait par exemple qu'il existe des opérations régularisantes linéaires qui permettent de retrouver le moment avec une précision arbitraire (avec un modèle continu).

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.
- ▶ On cherche d'autre part des formules pour le moment à partir du champ (sans reconstruire d'aimantation équivalente) qui marcheraient dans des cas semi-localisés.
- ▶ Enfin on réfléchit à des régularisations plus subtiles. On sait par exemple qu'il existe des opérations régularisantes linéaires qui permettent de retrouver le moment avec une précision arbitraire (avec un modèle continu). Elles vérifient des équation aux dérivées partielles elliptiques à coefficients irréguliers.

Au futur

- ▶ Actuellement, on se concentre sur le problème du moment.
- ▶ On essaie d'une part d'autres critères d'approximation.
- ▶ On cherche d'autre part des formules pour le moment à partir du champ (sans reconstruire d'aimantation équivalente) qui marcheraient dans des cas semi-localisés.
- ▶ Enfin on réfléchit à des régularisations plus subtiles. On sait par exemple qu'il existe des opérations régularisantes linéaires qui permettent de retrouver le moment avec une précision arbitraire (avec un modèle continu). Elles vérifient des équation aux dérivées partielles elliptiques à coefficients irréguliers. On aimerait les calculer.

Au fait...

Il est où ce café ?