



Université de Carthage  
École Polytechnique de Tunisie  
Laboratoire d'Ingénierie Mathématique

## MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
mastère en Ingénierie Mathématique de  
l'École Polytechnique de Tunisie par

**Soumaya OUESLATI**

---

# Étude analytique et numérique du problème de Saint-Venant avec une dynamique biologique

---

Encadré par : M. Fayssal BENKHALDOUN  
Mlle. Sondes KHABTHANI  
Soutenu le 11 Janvier 2014  
Devant la Commission d'Examen

JURY

M. Ali ABDENNADHER

Président de jury

M. Habib BOUHAFI

Rapporteur



# Dédicace

Dieu

Merci pour ce que nous sommes.

Je dédie ce travail à

Mon père

qui n'a jamais cessé de me soutenir, m'assister et m'encourager durant  
ce long cycle d'études.

Ma mère

que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je lui dois, pour sa bien  
vaillance dès mon jeune âge, son affection et son soutien.

Mes sœurs et mon frère

pour leurs encouragements, leurs aides et soutien.

Et tous mes amis, enseignants et encadreurs qui m'ont aidé de proche  
et de loin avec leurs conseils et leurs encouragements.

Merci à tous le monde



# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce rapport dans les conditions les plus favorables, en particulier j'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur

**M. Fayssal BENKHALDOUN** de m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je le remercie vivement pour les heures d'encadrement qu'il m'a accordées et les remarques constructives qui m'ont été précieuses.

Je tiens à remercier également **Mlle. Sondes KHABTHANI** pour son co-encadrement, sa bienveillance et surtout ses conseils avisés et ses critiques constructives qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Ce travail a pu se faire grâce au programme de recherche Inria MedLagoon. Je remercie à cette occasion chaleureusement **M. Herve Guillard** directeur de projet, qui m'a permis de faire des stages décisifs pour ce mémoire.

J'exprime ma gratitude aux membres de Jury qui ont acceptés d'évaluer mon travail.

En particulier, Je présente mes remerciements les plus sincères à **M. Ali ABDENNADHER** pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury. J'adresse mes vifs remerciements à **Mr Habib BOUHAFI** qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être membre du Jury en tant que rapporteur. Une pensée spéciale à **Mme. Saïda SARI** et **M. Imad EL MAHI** pour leurs encouragements continus, leurs efforts et leurs interventions précieuses qui m'ont bien servi.

Je remercie également mes enseignants de mastère qui n'ont cessé de me transmettre leurs acquis et leurs expériences.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Développement de schémas numériques aux volumes finis pour des problèmes hyperboliques homogènes et non homogènes</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation des problèmes . . . . .	2
1.1.1 Problème hyperbolique homogène . . . . .	2
1.1.2 Problème hyperbolique non homogène . . . . .	3
1.2 Méthode des volumes finis . . . . .	4
1.3 Quelques problèmes traités par la méthode des volumes finis dans la littérature . . . . .	6
1.3.1 Les équations d'Euler . . . . .	6
1.3.2 Les équations de Saint-Venant . . . . .	7
1.3.2.1 Système de Saint-Venant avec topographie (fond variable) . . . . .	8
1.3.2.2 Système de Saint-Venant avec terme de frottement . . . . .	8
1.3.3 Les équations de transport de sédiments . . . . .	9
<b>2 Équation de transport-diffusion d'un modèle NPZD</b>	<b>11</b>

2.1	Méthode à pas fractionnaire (splitting) . . . . .	12
2.2	Équation différentielle ordinaire . . . . .	13
2.2.1	Stabilité et convergence . . . . .	14
2.2.2	Calcul d'erreur . . . . .	14
2.2.3	Schéma de Runge-Kutta . . . . .	16
2.2.4	Méthode de newton . . . . .	18
2.3	Équation du transport . . . . .	21
2.3.1	Schéma décentré . . . . .	21
2.3.2	Schéma de Lax-Wendroff . . . . .	25
2.3.3	Résolution par schéma de Lax-Wendroff avec limiteur . . .	27
2.3.3.1	Méthode limiteur de flux . . . . .	27
2.3.3.2	Résultats numériques avec plusieurs limiteurs . .	29
2.4	Résolution de l'équation de transport avec terme source . . . . .	31
2.5	Application du Modèle NPZD . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Résolution du modèle Saint-Venant avec transport de traceur ou une dynamique biologique</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Transport de traceur inerte . . . . .	42
3.1.1	Description du modèle physique . . . . .	42
3.1.2	Description de la méthode numérique . . . . .	43
3.1.3	Quelques résultats numériques obtenus . . . . .	45
3.2	Étude du modèle Saint-Venant couplé à la dynamique biologique (modèle NPZD) . . . . .	50
3.2.1	Description de la méthode numérique . . . . .	50



3.2.1.1	Etude par la méthode des volumes finis . . . . .	54
3.2.1.2	Limitation de flux pour les équations de transport du modèle NPZD . . . . .	55
3.2.2	Quelques résultats numériques obtenus . . . . .	57
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>i</b>



## Résumé

Ce mémoire est une contribution à la résolution numérique d'une loi de conservation hyperbolique résultant d'un couplage entre les équations de Saint-Venant, associées à la modélisation des écoulements en eaux peu profondes, et l'équation de transport-diffusion d'une dynamique biologique.

Le modèle mathématique utilisé est monodimensionnel, intégrant des termes de fonction dynamique biologique, de diffusion et un terme tenant compte de la variation de la densité. On présente un modèle numérique basé sur un schéma des volumes finis 1D d'ordres deux, conservatif et consistant sur un maillage. Ce modèle préserve numériquement la positivité de la hauteur de l'eau et l'état stationnaire associé au repos, il permet de capturer avec précision les ondes de choc ainsi que l'écoulement sur des fonds plats et avec une densité variable. Ensuite on présente quelques résultats obtenus pour le problème de transport d'organisme biologique (modèle NPZD) en utilisant une technique de limitation de flux pour éliminer les oscillations non physiques.



# Introduction

Le système de Saint-Venant est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et hyperboliques. On ne peut pas résoudre ce système analytiquement dans le cas général. Par conséquent, une résolution numérique de ce système s'impose. La simulation de l'écoulement d'eau peu profonde à surface libre revient à résoudre le système de Saint-Venant à l'aide d'un schéma numérique robuste c'est-à-dire capable de donner une solution numérique proche de la réalité quelles que soient les particularités de l'écoulement.

On peut citer de nombreuses applications soit dans le cadre des écoulements d'eaux peu profondes en présence d'un traceur, soit l'aménagement des ressources en eau, soit la protection de l'environnement et de l'écosystème : la simulation des écoulements dus à la rupture d'un barrage, la simulation du processus de changement du lit d'une rivière, la simulation des écoulements et du transport sédimentaire ou des polluants en milieux estuariens et côtiers, etc... Ces problèmes régis par les équations ont été beaucoup traités dans le cadre de la mécanique des fluides, en particulier on cite le travail de Stoker [27] et Ouazar [7]. En 1957, Stoker [27] a résolu les problèmes de propagation des ondes en eau peu profonde,

avec termes de pente et de frottement et plus récemment Ouazar en 1999 [7] a résolu les problèmes d'écoulements d'eau dans les nappes et notamment de l'intrusion d'eau salée dans les nappes côtières.

En plus de ces problèmes, on trouve le modèle régissant l'écoulement d'eau peu profonde en présence d'un traceur biologique. Les systèmes biologiques naturels étant infiniment complexes, chaque modèle biologique doit répondre à des exigences de représentativité bien identifiées. L'approche générale des modèles biologiques est de définir des composants représentatifs d'une classe biologique. Tandis que certaines thématiques tendent à mettre en place des modèles les plus réalistes possibles et multiplient les composants biologiques, d'autres n'ont besoin que des modèles plus simples mais suffisants pour l'étude de certains processus comme l'exemple du processus du transport des organismes biologiques du modèle NPZD utilisé par [19] et [9].

On s'intéresse dans ce travail à la simulation numérique des écoulements d'un modèle régissant en eaux peu profondes, par un schéma des volumes finis équilibré. Ces écoulements sont régis par le système d'équation de Barré de Saint Venant constitué de l'équation de continuité et de l'équation de la dynamique. À ce système d'équation hydrodynamique on couplera l'équation de transport-diffusion d'un traceur afin de prendre en considération le transport et la diffusion d'un modèle biologique NPZD dans l'écoulement.

Ainsi, l'écoulement d'eau peu profonde en présence d'un traceur biologique régi par les équations suivantes :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t hu + \partial_x(hu^2 + \frac{g h^2}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho} g h^2 \partial_x c, \quad (2)$$

$$\partial_t(hc) + \partial_x(huc) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c) + F(c), \quad (3)$$

avec  $\rho$  est la densité du mélange fluide-traceur.  $\rho = \rho_w(1 - c) + \rho_c c$  où  $\rho_w$  est la densité du fluide et  $\rho_c$  est la densité du traceur et  $F(c)$  est la fonction dynamique biologique.

Le travail présenté dans ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des différents problèmes hyperboliques. On rappelle ensuite la construction de la méthode des volumes finis. Puis, on présente brièvement quelques problèmes déjà traités par cette méthode : les équations de Saint-Venant, les équations d'Euler et les problèmes d'écoulements à surface libre avec transport de sédiments.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux méthodes de résolution numériques de l'équation transport-diffusion de modèle NPZD. Après avoir rappelé la base de la méthode des caractéristiques, on présente brièvement les notions classiques de stabilité, de convergence et de calcul des erreurs. Une partie spécifique traite des méthodes permettant de réduire la diffusion numérique (méthodes à limiteur de flux), ce qui est en pratique l'enjeu principal de la simulation numérique de cette classe de problèmes. On expose les résultats obtenus.

Le troisième chapitre est consacré au développement de schéma des volumes finis

pour la simulation numérique de la dynamique du modèle NPZD en suspension et de leur transport par l'écoulement à surface libre et variation de densité. On utilise une technique de limitation de flux.



# Chapitre 1

## Développement de schémas numériques aux volumes finis pour des problèmes hyperboliques homogènes et non homogènes

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation des problèmes . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Problème hyperbolique homogène . . . . .	2
1.1.2	Problème hyperbolique non homogène . . . . .	3
<b>1.2</b>	<b>Méthode des volumes finis . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Quelques problèmes traités par la méthode des volumes finis dans la littérature . . . . .</b>	<b>6</b>
1.3.1	Les équations d'Euler . . . . .	6
1.3.2	Les équations de Saint-Venant . . . . .	7
1.3.3	Les équations de transport de sédiments . . . . .	9

---

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Dans la première section on présente les problèmes hyperboliques homogènes et non homogènes, la deuxième section est consacrée à la discrétisation par volumes finis et la troisième section présente quelques problèmes traités.

## 1.1 Présentation des problèmes

### 1.1.1 Problème hyperbolique homogène

Durant ces dernières années, beaucoup de travaux ont été consacrés au traitement des systèmes hyperboliques homogènes non linéaires ou de lois de conservation. On peut citer la première méthode numérique capable de prendre en compte des discontinuités qui est basée sur un schéma explicite décentré. Cette méthode proposée par Godunov en (1959) [11] de premier ordre et nécessite une résolution itérative à chaque pas de temps. Elle a été rendue plus attractive par une extension au second ordre de précision par Van Leer [16], puis par le développement d'autres solveurs de Riemann approchés comme celui de Lax-Friedrichs [15], Lax-Wendroff [14], Roe [21], HLI (Harten, Lax et Van Leer) [18] et celui d'Osher et Saloman [17].

Les systèmes de loi de conservation en 1D sont des équations aux dérivées partielles dépendant du temps, usuellement non linéaires. Ces équations prennent la forme générale suivante :

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1)$$

où  $W$  est le vecteur des variables conservatives et  $F$  le flux physique. Au système doivent être rajoutées des conditions initiales  $W(x, 0) = W_0(x)$ .

#### Hyperbolicité

Notons par  $A(W)$  la matrice jacobienne de la fonction  $F(W)$ . Le système (1.1) est dit hyperbolique si la matrice  $A(W)$  est diagonale et a toutes ses valeurs propres réelles. Si ces valeurs propres sont distinctes, le système est dit strictement hyperbolique.

On range ces valeurs propres par ordre croissant et on notera  $\lambda_1(W) < \lambda_2(W) < \dots < \lambda_p(W)$

où  $\lambda_j(W)$  est la  $j$ -ième valeur propre de  $A(W)$ .

### 1.1.2 Problème hyperbolique non homogène

Dans un domaine  $D \subset \mathbb{R}$ , le système hyperbolique non homogène prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(W(x,t))}{\partial x} = S(x, t, W) & x \in D \subset \mathbb{R}, t > 0 \\ W(x, 0) = W_0(x), \forall x \in D, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $S$  le terme source borné,  $W$  le vecteur des variables conservatives et  $F$  le flux physique.

La résolution numérique des problèmes non homogènes a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches, notamment pour le problème de Saint-Venant avec terme source. On mentionne par exemple les travaux de Roe [22] qui a montré que le terme source doit être discrétisé de la même façon que le flux numérique. Glaister [10] a appliqué l'idée de Roe à l'équation de Saint-Venant. Bermudez et Vazquez [3] ont donné des exemples de discrétisation du terme source basés sur des schémas équilibrés.

Alcrudo et Benkhaldoun [1] ont donné la solution auto similaire exacte pour le problème de Riemann de l'équation de Saint-Venant avec un fond discontinu. Ensuite, Benkhaldoun a déduit un schéma général de type prédicteur-correcteur pour la simulation numérique des problèmes non homogènes . Dans [2], ce schéma a été appliqué avec succès dans le cas 1D aux écoulements diphasiques et au problème de Saint-Venant avec un terme source.

Sahmim [26] a montré qu'une analyse mathématique d'une version modifiée du

schéma SRNH permettait d'aboutir à un schéma SRNHS. Ce dernier a une grande ressemblance avec le schéma décentré amont au niveau des techniques utilisées (matrice de Roe, matrice signe, décentrement amont, solution de Riemann approchée), mais ils se différencient dans la manière d'introduire l'approximation de la solution du problème de Riemann avec présence de terme source. Ensuite, le schéma SRNHS a été appliqué au problème de Saint-Venant avec une topographie irrégulière [26].

Très récemment, plusieurs articles ont été publiés sur la propriété de conservation telle que la discrétisation des gradients de flux et les termes sources sont bien équilibrés dans la solution numérique de modèle de sédiments en suspension, on citera par exemple S. Sari [23] qui a traité des problèmes de transport de sédiments en eaux peu profondes à l'aide d'un solveur de Riemann non homogène (SRNH). Dans le cas monodimensionnel, elle a utilisé une technique de limitation de flux basée sur le schéma de Lax-Wendroff couplé à SRNH.

## 1.2 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation pour les équations de conservation. Dans cette section, avant de présenter quelques schémas numériques des volumes finis permettant la résolution de l'équation (1.2), on va construire la méthode en 1D. En effet cette méthode consiste à discrétiser sur chaque cellule.

Pour construire la méthode des volumes finis, on utilise la forme intégrale de l'équation (1.2) sur le domaine  $R \subset D \times [0, +\infty[$ .

Soit  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_t \end{pmatrix}$ , le vecteur normal unitaire extérieur à  $\partial R$ , frontière du domaine  $R$ .

On discrétise le domaine en espace et en temps en subdivisant  $D$  en intervalles successifs :

On pose  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , et  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

On intègre l'équation (1.2) sur une cellule  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$  on aura :

$$\begin{aligned} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_{n+1}) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x_{i-\frac{1}{2}}, t) dt \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S(x, t, W) dx dt, \end{aligned}$$

on choisit de prendre pour un état moyen, la quantité

$$W_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_n) dx.$$

Enfin, on pose  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt = \phi(W_i^n, W_{i+1}^n)$ ,

ici,  $\phi$  représente le flux numérique à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  pour  $t$  compris entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

On peut alors écrire le schéma sous la forme suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r [\phi(W_i^n, W_{i+1}^n) - \phi(W_{i-1}^n, W_i^n)] + \Delta t S_i^n,$$

où on a posé  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

$S_i^n$  est l'approximation du terme source définie par :  $\frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S(x, t, W) dx dt$ .

Le flux numérique  $\phi(W_i^n, W_{i+1}^n)$  doit vérifier des propriétés de consistance et de

stabilité pour assurer la convergence de la méthode.

Par exemple, pour le schéma de Lax-Wendroff, le flux numérique s'écrit :

$$\phi(W_i^n, W_{i+1}^n) = \frac{1}{2}[F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)] - \frac{r}{2} A(\nu(W_i^n, W_{i+1}^n))[F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)]$$

pour le schéma de Lax-Friedrichs, le flux numérique s'écrit :

$$\phi(W_i^n, W_{i+1}^n) = [F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)] - \frac{p}{r}[W_{i+1}^n - W_i^n]$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{4}.$$

## 1.3 Quelques problèmes traités par la méthode des volumes finis dans la littérature

### 1.3.1 Les équations d'Euler

Les équations de la dynamique des gaz pour un fluide parfait s'écrivent en 1D sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + P) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x u(E + P) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec la lois d'état pour les gaz parfaits  $P = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2)$ ,

$\rho$ ,  $P$ ,  $u$  et  $E$  sont respectivement la densité du gaz, la pression, la vitesse dans la direction  $x$  et l'énergie totale.

Les variables conservatives et la fonction du flux physique sont donnés par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \text{ et } F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(E + P) \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système (1.3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0 \\ W(x, 0) = W_0(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

$A$  est la matrice jacobienne de la fonction du flux définie par :

$$A(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u[(\gamma-1)u^2 - \gamma E] & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix},$$

avec  $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  est la vitesse du son.

L'intégration du système (1.4) sur le domaine  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$  donne

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\phi(W_i^n, W_{i+1}^n) - \phi(W_{i-1}^n, W_i^n)],$$

où  $\phi$  représente le flux numérique.

### 1.3.2 Les équations de Saint-Venant

Un autre type de système de lois de conservation est celui de Saint-Venant dont les équations régissent l'écoulement à surface libre. Les applications les plus courantes de ce modèle sont la rupture de barrage, les crues, les systèmes d'irrigation et les écoulements marins.

Ce modèle peut inclure une variété de termes sources adaptée aux besoins spécifiques de chaque phénomène comme des termes sources tenant compte des variations de la topographie du fond, des termes de frottement sur le fond ou encore des termes générateur de mouvements tenant compte de l'influence du vent sur la surface. Tout au long de la section 1.3.2.1 on s'intéressera à la topographie du fond comme terme source.

### 1.3.2.1 Système de Saint-Venant avec topographie (fond variable)

L'équation de Saint-Venant avec topographie irrégulière s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x(h u) = 0 \\ \partial_t(h u) + \partial_x(h u^2 + \frac{1}{2} g h^2) = -g h \partial_x Z, \end{cases} \quad (1.5)$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W), \quad (1.6)$$

en prenant en considération les variables conservatives, la fonction du flux physique et le terme source suivant :

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix}, S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h \partial_x Z \end{pmatrix},$$

$h$ ,  $u$  sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'eau,  $g$  la gravité et  $Z$  la hauteur (variable) du fond. Ce problème de Saint-Venant a été traité par Bermudez et Vasquez [3], Greenberg et Leroux [12] et Lévêque [20]. Shmmim [26] a utilisé une nouvelle approche pour le traitement de ce problème avec le schéma SNRHS.

### 1.3.2.2 Système de Saint-Venant avec terme de frottement

On considère maintenant le système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach :

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x(h u) = 0 \\ \partial_t(h u) + \partial_x(h u^2 + \frac{1}{2} g h^2) = -g h \partial_x Z - g h S_f. \end{cases} \quad (1.7)$$

Où  $h$  est la hauteur de l'eau,  $u$  est la vitesse d'écoulement du fluide,  $g$  est la constante de gravité et  $S_f$  est le terme de frottement [8].



Ce système (1.7) est strictement hyperbolique. Les valeurs de la matrice jacobienne de la fonction flux sont données par :

$$\lambda_1 = u - c$$

$$\lambda_2 = u + c$$

où  $c = \sqrt{gh}$  est la vitesse du son.

### 1.3.3 Les équations de transport de sédiments

Les sédiments sont issus de l'altération des formations continentales superficielles et de l'activité biologique etc... Dans leurs études, Cao et al. dans [5] et [25] considèrent le modèle de transport sédimentaire suivant :

$$\partial_t h + u \partial_x (h u) = \frac{E - D}{1 - p}, \quad (1.8)$$

$$\partial_t (h u) + \partial_x \left( h u^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) = -g h \partial_x Z - \frac{\rho_s - \rho_w}{2\rho} g h^2 \partial_x c - \frac{(\rho_0 - \rho)(E - D) u}{\rho(1 - p)} - g h S_f, \quad (1.9)$$

$$\partial_t (h c) + \partial_x (h u c) = E - D, \quad (1.10)$$

$$\partial_t Z = -\frac{E - D}{1 - p}, \quad (1.11)$$

où  $u$ ,  $h$  sont respectivement la vitesse et la hauteur de l'eau,  $Z$  la topographie du fond,  $g$  la gravité,  $p$  la porosité,  $\rho_w$  la densité de l'eau,  $\rho_s$  est la densité des sédiments et  $c$  la concentration des particules en suspension.  $\rho$  et  $\rho_0$  sont les densités respectives du mélange eau-sédiment et du lit saturé.  $E$  et  $D$  représentent les termes d'érosion et de déposition et  $S_f$  est le terme de frottement. Les équations de ce modèle forment un système non linéaire de lois de conservation hyperbolique avec termes sources qui simulent le transport de sédiments dans des eaux

## **Chapitre 1. Développement de schémas numériques aux volumes finis pour 10 des problèmes hyperboliques homogènes et non homogènes**

---

peu profondes à surface libre. Ce modèle a été étudié aussi par S. Sari [23]. Elle a utilisé une technique de limitation de flux entre le solveur de Riemann SRNH et le schéma de Lax-Wendroff qu'a donné une bonne prédiction de l'évolution de la surface libre et du fond.

# Chapitre 2

## Équation de transport-diffusion d'un modèle NPZD

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Méthode à pas fractionnaire (splitting)</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Équation différentielle ordinaire</b>	<b>13</b>
2.2.1	Stabilité et convergence	14
2.2.2	Calcul d'erreur	14
2.2.3	Schéma de Runge-Kutta	16
2.2.4	Méthode de newton	18
<b>2.3</b>	<b>Équation du transport</b>	<b>21</b>
2.3.1	Schéma décentré	21
2.3.2	Schéma de Lax-Wendroff	25
2.3.3	Résolution par schéma de Lax-Wendroff avec limiteur	27
<b>2.4</b>	<b>Résolution de l'équation de transport avec terme source</b>	<b>31</b>
<b>2.5</b>	<b>Application du Modèle NPZD</b>	<b>33</b>

---

Le modèle mathématique qu'on adoptera tout au long de ce travail régissant les écoulements en eaux peu profondes avec la prise en compte d'une dynamique

biologique  $F(c)$  est donné sous la forme suivante :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t hu + \partial_x(hu^2 + \frac{g h^2}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho} g h^2 \partial_x c, \quad (2.2)$$

$$\partial_t(hc) + \partial_x(huc) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c) + F(c). \quad (2.3)$$

Dans ce chapitre, on a considéré la hauteur de l'eau  $h$  et la vitesse  $u$  comme étant des constantes en première approche et  $\rho_c = \rho_w$ . Ainsi les équations (2.1)-(2.3) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\partial_t c + u \partial_x c = \mathcal{D} \partial_{xx} c + \frac{F(c)}{h}. \quad (2.4)$$

Il y a plusieurs méthodes pour traiter l'équation de transport ci-dessus avec terme source, on va se restreindre ici à la méthode à pas fractionnaire [28]. À chaque niveau de résolution on utilisera ou bien Runge-Kutta ou bien Lax-Wendroff ou bien Euler. Dans la suite on rappellera leurs schémas qui ont été développés en se basant sur la propriété de stabilité, de convergence et d'erreur de la solution du problème.

## 2.1 Méthode à pas fractionnaire (splitting)

Dans un premier temps, on néglige le terme de diffusion  $\mathcal{D} \partial_{xx} c$ , on décompose l'équation (2.4) en deux systèmes :

On résout tout d'abord l'EDO

$$\tilde{c}(t) = \frac{F(\tilde{c})}{h}, \quad (2.5)$$

avec la condition initiale  $\tilde{c}(0) = c_0$ .

Puis on résout l'EDP (2.6) avec la condition initiale  $c(x, 0) = \tilde{c}(0)$ ,

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0. \quad (2.6)$$

On pose  $\frac{F(\tilde{c})}{h} = a\tilde{c} + b$ , dans l'équation (2.5) on obtient ainsi

$$\tilde{c}'(t) = a\tilde{c} + b. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une technique classique de fractionnement d'opérateur proposée par Yanenko dans [28]. Pour l'équation différentielle (2.7) on utilise une méthode Euler linéaire. Ensuite, on pourra résoudre le système homogène (2.6) en utilisant les schémas Lax-Wendroff, Runge-kutta et Euler. Cette démarche s'est révélée en particulier d'une grande efficacité pour traiter l'équation (2.4).

## 2.2 Équation différentielle ordinaire

La solution exacte de l'équation différentielle ordinaire (2.7) est

$$c(t) = c(0) e^{at} - \frac{b}{a}(e^{at} - 1),$$

on pose  $a > 0$

$$\text{on a } c'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow c'(t_n) \simeq \frac{c(t_{n+1}) - c(t_n)}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(t_{n+1}) - c(t_n)}{\Delta t} - a c(t_n) - b \simeq 0,$$

on peut alors écrire le schéma Euler sous la forme suivante :

$$c^{n+1} = (1 + a \Delta t) c^n + b \Delta t.$$

### 2.2.1 Stabilité et convergence

La stabilité d'un schéma numérique concerne l'exactitude des résultats fournis par l'algorithme. Elle décrit comment les erreurs sont propagées à travers l'algorithme. On cherche constamment à diminuer cette diffusion numérique pour améliorer les codes de calcul à chaque traitement numérique et altérer le résultat. La convergence caractérise l'aptitude d'un schéma numérique à tendre vers la solution exacte lorsqu'on augmente le nombre de maille. Un schéma qui ne converge pas, ne satisfait pas au théorème d'équivalence de Lax qui stipule qu'un schéma consistant est convergent si et seulement si il est stable. Cependant, il est difficile en général de démontrer la stabilité d'un schéma.

$$|c^{n+1}| = |(1 + a \Delta t) c^n + b \Delta t|,$$

si  $|c^{n+1}| < +\infty$  alors le schéma est stable. En effet on a

$$|c^n| \leq |(1 + a \Delta t)^n| |c_0| + \sum_{k=0}^{n-1} |(1 + a \Delta t)^k| b \Delta t.$$

Conclusion : si  $|1 + a\Delta t| \leq 1$  le schéma est donc stable sous la condition

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{2}{|a|}.$$

### 2.2.2 Calcul d'erreur

L'objectif est de calculer l'erreur d'ordre 1 et d'ordre 2. On effectue aussi une comparaison entre quelques méthodes.

Erreur de Troncature : L'erreur de troncature se calcule en développant tous les termes du schéma en même point à l'aide des formules de Taylor. Le point choisi n'a évidemment aucune influence sur le résultat obtenu (l'ordre du schéma ne dépend pas du point considéré), si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque tous

les pas de discrétisation tend vers 0, la consistance ne concerne que le schéma de résolution et non pas la solution. Un schéma consistant peut fournir une mauvaise solution. On calcule l'erreur de troncature de l'équation (2.5) et on note  $E_T$  :

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} - a c(t) - b \\ &= c_t(t) + \frac{\Delta t}{2} c_{tt}(t) - a c(t) - b + O(\Delta t^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2} c_{tt}(t) + O(\Delta t^2), \quad \text{or } c_{tt}(t) = c''(t) = c(0) a^2 e^{at}, \\ \text{donc } E_T &= \frac{\Delta t}{2} c(0) a^2 e^{at} + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

On pose  $T > 0$  relativement grand et  $T_k = k \Delta t$   $k \in \mathbb{N}$  et  $k\Delta t \leq T$ ,

on note  $c^k$  la valeur numérique de l'équation (2.5) avec le schéma numérique pour un pas de temps  $\Delta t$ . On cherche à comparer cette valeur approché  $c^k$  à la valeur exacte  $c_{ex}(T_k)$ .

L'erreur notée  $ER$  est en

$$\begin{aligned} \text{norme } L^1 : \|ER(T)\|_{L^1} &= \int_0^T |c(t) - c_{ex}(t)| dt = \sum_{k=0}^n \int_{T_k}^{T_{k+1}} |c^k - c_{ex}(T_k)| dt \\ &= \sum_{k=0}^n \Delta t |c^k - c_{ex}(T_k)|. \\ \text{norme } L^2 : \|ER(T)\|_{L^2}^2 &= \int_0^T |c(t) - c_{ex}(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^n \int_{T_k}^{T_{k+1}} |c^k - c_{ex}(T_k)|^2 dt \\ &= \sum_{k=0}^n \Delta t |c^k - c_{ex}(T_k)|^2. \\ \text{norme } L^\infty : \|ER(T)\|_{L^\infty} &= \sup_{0 < T_k < T} |c^k - c_{ex}(T_k)|. \end{aligned}$$

Cette dernière formule exprime une majoration de l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte en norme  $L^\infty$ .

En générale l'erreur est donnée par

$$ER(\Delta t) = \lambda(\Delta t)^p, \quad (2.8)$$

$p$  étant l'ordre de l'erreur et  $\lambda$  est une constante. L'ordre  $p$  est retrouvé comme suit :

si on divise dans (2.8) le pas de temps par 2 on obtient :

$$\frac{ER(\Delta t)}{ER(\frac{\Delta t}{2})} = 2^p \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{ER(\Delta t)}{ER(\frac{\Delta t}{2})}\right) = p \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\log\left(\frac{ER(\Delta t)}{ER(\frac{\Delta t}{2})}\right)}{\log(2)}$$

### 2.2.3 Schéma de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation plus précise, et ainsi de suite. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée par Shu et Osher [24].

On utilise le schéma Runge-Kutta suivant :

$$\begin{cases} c^{n+\frac{1}{2}} = c^n + \frac{\Delta t}{2} (a c^n + b) \\ c^{n+1} = c^n + \Delta t (a c^{n+\frac{1}{2}} + b), \end{cases} \quad (2.9)$$

donc l'erreur de troncature de l'équation (2.5) avec le schéma Runge-Kutta est :

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} - a(c(t) + \frac{\Delta t}{2}(a c(t) + b)) + b \\ &= c_t + \frac{\Delta t}{2} c_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} c_{ttt} - a c - b - \frac{\Delta t}{2} a^2 c - \frac{\Delta t}{2} a b + O(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{6} c_{ttt} + O(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{6} a^2 (a c + b) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

On présente dans FIGURE 2.1 la solution numérique obtenue en appliquant la méthode d'Euler et celle de Runge-Kutta et ce pour la valeur  $\Delta t = 0.125$ . On constate la très bonne coïncidence entre la solution numérique avec la méthode Runge-Kutta et la solution exacte pour tous les pas de temps  $\Delta t \in [0, \frac{2}{a}]$ . Pour faire une analyse plus fine, on a rapporté dans TABLE 2.1 et TABLE 2.2 l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique. On constate que l'erreur est très faible. Cette erreur décroît lorsque le pas de temps décroît.



$\Delta t$ \ ER et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
2	0.9024		0.1515		0.0362	
1	0.4416	1.0310	0.0733	1.0474	0.0173	1.0652
0.5	0.2184	1.0158	0.0361	1.0218	0.0085	1.0252
0.25	0.1086	1.0079	0.0179	1.020	0.0042	1.0171
0.125	0.0541	1.0053	0.0089	1.0080	0.0021	1

TABLE 2.1 – Résolution de l'équation (2.5) par la méthode d'Euler : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta t$ \ ER et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
2	0.0674		0.0111		0.0026	
1	0.0156	2.1112	0.0026	2.0953	0.00059539	2.1266
0.5	0.0037	2.0759	0.00061499	2.0799	0.00014326	2.0552
0.25	0.00091708	2.0124	0.0001508	2.0274	3.5144E-005	2.0273

TABLE 2.2 – Résolution de l'équation (2.5) par la méthode de Runge Kutta : Erreurs et ordres de convergence.

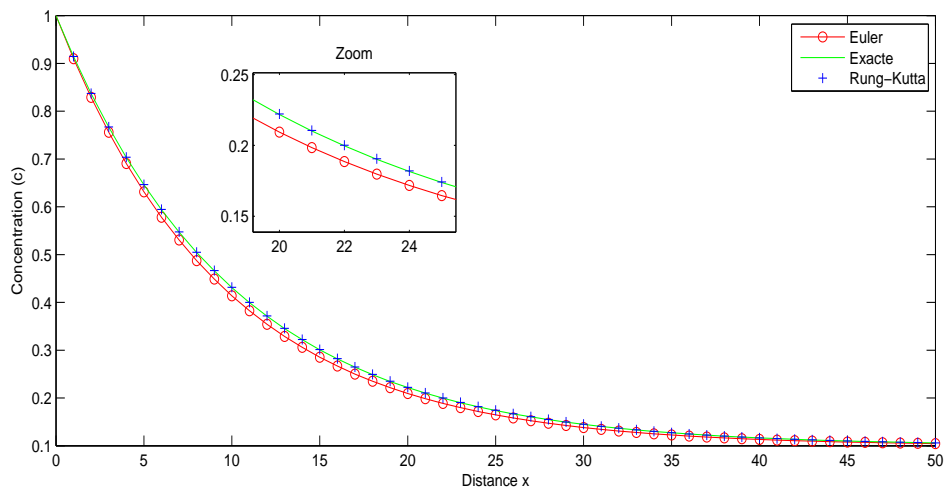


FIGURE 2.1 – Courbes obtenues pour les deux schémas Euler et Rung-Kutta avec  $\Delta t = 0.125$  ainsi que la solution exacte de l'équation (2.7).

### 2.2.4 Méthode de newton

La méthode de Newton est une méthode de résolution de l'équation  $F(x) = 0$ . On peut faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $F$  en un point  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . Ce qui fournit un modèle linéaire de  $F$  autour de  $x_k$  :

$$F(x) = F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k),$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) = 0 \Leftrightarrow F'(x_k)(x - x_k) = -F(x_k),$$

$$\text{donc } x - x_k = -(F'(x_k))^{-1} F(x_k),$$

$$\text{ou encore } x = x_k - (F'(x_k))^{-1} F(x_k).$$

En posant  $x_{k+1} = x$ , on obtient une nouvelle approximation du zéro de  $F$ , ainsi que la récurrence suivante :

$$x_{k+1} = x_k - (F'(x_k))^{-1} F(x_k).$$

Toutefois à chaque itération l'algorithme doit calculer le jacobien  $F'(x_k)$  de  $F$  en  $x_k$ , ce qui n'est pas forcément très facile en pratique : D'une part, lorsque le système à résoudre atteint des dimensions très élevées, le temps de calcul du jacobien de  $F$  est très long. D'autre part, la fonction  $F$  peut être du type "boite noire" c'est-à-dire qu'elle n'est pas connue explicitement elle prend simplement un point  $x$  en argument et renvoie un point  $F(x)$  sans que l'on sache quelles opérations ont été effectuées entre temps.

On considère à présent l'équation suivante :

$$c'(t) = \frac{F(c)}{h} = \frac{ac + b}{dc + e}, \quad (2.10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dc+e}{ac+b} dc = dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \beta \frac{1}{c+\gamma}\right) c' = 1,$$

avec  $\alpha = \frac{a}{d}$ ,  $\beta = \frac{a}{d} \left( \frac{b}{a} - \frac{e}{d} \right)$  et  $\gamma = \frac{e}{d}$  donc  $(\alpha + \beta \frac{1}{c+\gamma}) dc = dt$ .

La solution exacte est donnée par

$$f(c) = \left( \frac{c - \gamma}{c(0) + \gamma} \right)^\beta e^{\alpha(c-c(0))} - e^t,$$

si  $c(0) = 1$ ,  $f(c) = \left( \frac{c-1}{1+\gamma} \right)^\beta e^{\alpha(c-1)} - e^t$ .

En raffinant le pas de temps, on constate que l'ordre numérique obtenu est proche de 1 lorsqu'on utilise le schéma d'Euler et converge vers 2 pour le schéma Runge-Kutta. Ce dernier donne l'erreur numérique la plus faible, pour un pas de temps donné. Par exemple l'erreur en norme  $L^\infty$  est égale à  $1,7583 \cdot 10^{-4}$  (le schéma est plus diffusif). Et c'est le schéma d'Euler avec  $\Delta t = 5$ , qui donne l'erreur numérique la plus importante. L'erreur décroît lorsque le pas de temps décroît (voir TABLE 2.3 et TABLE 2.4).

$\Delta t \backslash ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
5	1.7775		0.4049		0.1064	
2.5	0.7892	1.1714	0.1830	1.1457	0.0497	1.0982
1.25	0.3702	1.0921	0.0870	1.0921	0.0239	1.0562
0.625	0.1791	1.0475	0.0424	1.0370	0.0117	1.0305

TABLE 2.3 – Résolution de l'équation (2.10) par la méthode d'Euler : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta t$ \ ER et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
5	0.2167		0.0518		0.0149	
2.5	0.0439	2.3034	0.0107	2.2753	0.0032	2.2192
1.25	0.0099	2.1487	0.0024	2.1565	7.3105E-004	2.1300
0.625	0.0023	2.1058	5.8042E-004	2.0479	1.7583E-004	2.0558

TABLE 2.4 – Résolution de l'équation (2.10) par la méthode Runge Kutta : Erreurs et ordres de convergence.

FIGURE 2.2 présente la solution obtenue avec le schéma d'Euler d'ordre 1, le schéma Runge-Kutta d'ordre 2 et la solution exacte avec la méthode de Newton à  $\Delta t = 0.625$ . On constate bien que la solution du schéma d'ordre 1 présente un faible décalage par rapport à la solution de Runge Kutta qui coïncide avec celle de la solution exacte.

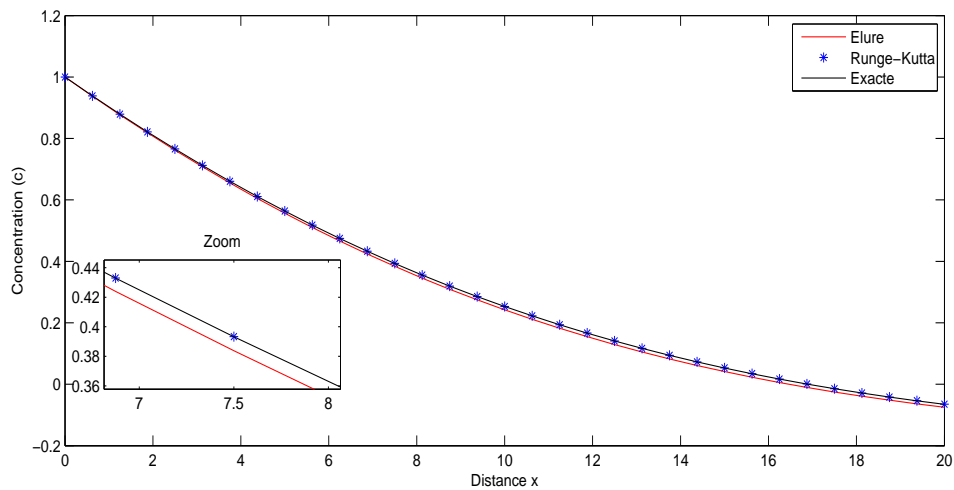


FIGURE 2.2 – Courbes obtenues pour les deux schémas Euler et Rung-Kutta avec  $CFL = 0.125$  ainsi que la solution exacte de l'équation (2.10).

## 2.3 Équation du transport

On considère ici le transport d'un traceur de concentration  $c$  dans un milieu fluide peu profond de vitesse  $u$  supposée connue et constante dans un premier temps. L'équation d'évolution est alors donnée par

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad c(x, t = 0) = c_0(x). \quad (2.11)$$

La solution évidente à ce problème est :

$$c(x, t) = c_0(x - ut).$$

On peut retrouver cette solution en recourant à la méthode des caractéristiques en effet :

Soit  $X_{x_0}$  la courbe caractéristique issue de la position initiale  $x_0$ , définie par

$$\frac{dX_{x_0}}{dt} = u, \quad X_{x_0}(0) = x_0.$$

Les courbes caractéristiques sont bien entendues des droites parallèles

$$X_{x_0}(t) = x_0 + ut.$$

Il ne passe donc qu'une caractéristique en  $(x, t)$ , celle associée au point  $x_0 = x - ut$ . On note  $c_{x_0}(t) = c[X_{x_0}(t), t]$ , la concentration du traceur le long de la courbe caractéristique.

### 2.3.1 Schéma décentré

Pour résoudre l'équation du transport, on va appliquer la méthode des volumes finis. Le schéma décentré est alors obtenu en choisissant le flux numérique sous la forme :

$$\phi(c_i^n, c_{i+1}^n) = u c_i^n, \quad u > 0.$$

Ainsi le schéma décentré d'ordre 1 est donné comme suit :

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = u \frac{(c_j^n - c_{j-1}^n)}{\Delta x}. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) peut également s'écrire sous la forme :

$$c_j^{n+1} = c_j^n - \nu (c_j^n - c_{j-1}^n). \quad (2.13)$$

Avec  $\nu$  le nombre de courant qui intervient dans le critère de stabilité

$$\nu = \frac{u \Delta t}{\Delta x}. \quad (2.14)$$

### Stabilité

L'étude de la stabilité est liée à la propagation des erreurs du temps. Pour le schéma décentré une interprétation possible est de dire que le signal ne doit pas franchir plus d'une maille sur un pas de temps soit :  $\nu < 1$ .

On a  $c_j^{n+1} = c_j^n - \frac{u \Delta t}{\Delta x} (c_j^n - c_{j-1}^n)$ ,

$$c_{j+1}^{n+1} - c_j^{n+1} = c_{j+1}^{n+1} - \frac{u \Delta t}{\Delta x} (c_{j+1}^{n+1} - c_{j-1}^{n+1}) - c_j^n + \frac{u \Delta t}{\Delta x} (c_j^n - c_{j-1}^n),$$

$$|c_{j+1}^{n+1} - c_j^{n+1}| = |(c_{j+1}^{n+1} - c_j^n) - \frac{u \Delta t}{\Delta x} (c_{j+1}^{n+1} - c_j^n) + \frac{u \Delta t}{\Delta x} (c_{j-1}^{n+1} - c_{j-1}^n)|$$

$$\leq |(1 - \frac{u \Delta t}{\Delta x})| |c_{j+1}^{n+1} - c_j^n| + |\frac{u \Delta t}{\Delta x}| |c_{j-1}^{n+1} - c_{j-1}^n|$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |c_{j+1}^{n+1} - c_j^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} (|(1 - \frac{u \Delta t}{\Delta x})| + |\frac{u \Delta t}{\Delta x}|) |c_{j-1}^{n+1} - c_{j-1}^n|$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{u \Delta t}{\Delta x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Cette condition de stabilité est appelée condition de Courant-Friedrichss-Lewy condition donnée par  $CFL = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

### Calcul d'erreur

Notre objectif est de calculer l'erreur d'ordre 1 et ordre 2. On effectue aussi une comparaison entre quelques méthodes.

Application numérique

On considère l'équation (2.11) avec la condition initiale discontinue suivante :

$$c_0(x) = \begin{cases} c_g = 2, & \text{si } x \leq 5 \\ c_d = 0, & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad x \in [0, 10]. \quad (2.15)$$

Dans ce cas on sait que la solution est une onde de choc qui se propageant vers la droite avec une vitesse  $u$ . Dans le cas sans choc on prend une condition initiale  $c_0(x) = \frac{1}{2}(c_g(x) + c_d(x)) + \frac{1}{2}(c_g(x) - c_d(x))th(\frac{x-x_m}{2})$ .

On réalise la simulation de ce problème en utilisant à nouveau les schémas avec choc et sans choc par la méthode d'Euler. Les calculs ont été réalisés sur un maillage donné pour un pas d'espace  $\Delta x = 0.1$  ce qui a permis d'avoir une solution qui s'approche le plus de la solution exacte pour  $n=101$  points relatif à la valeur  $CFL = 0.5$ , les résultats sont donnés à  $t = 2$ . On remarque que la solution numérique approchée avec la solution analytique dans le cas du schéma avec choc présentent une forte diffusion au moment de la discontinuité voir FIGURE 2.3.

Après raffinement du maillage, on constate que les schémas d'Euler à ordre similaire tend vers 1 pour  $\Delta x = 0.025$ .

Dans le cas du schéma d'Euler avec condition initiale continue, les erreurs numériques sont faibles. Néanmoins, les ordres n'atteignent pas la valeur 1 (voir TABLE 2.5 et TABLE 2.6). Afin de trouver une solution numérique qui coïncide avec celle analytique de ce problème, on optera pour la résolution suivant le schéma de Lax-Wendroff d'ordre 2.

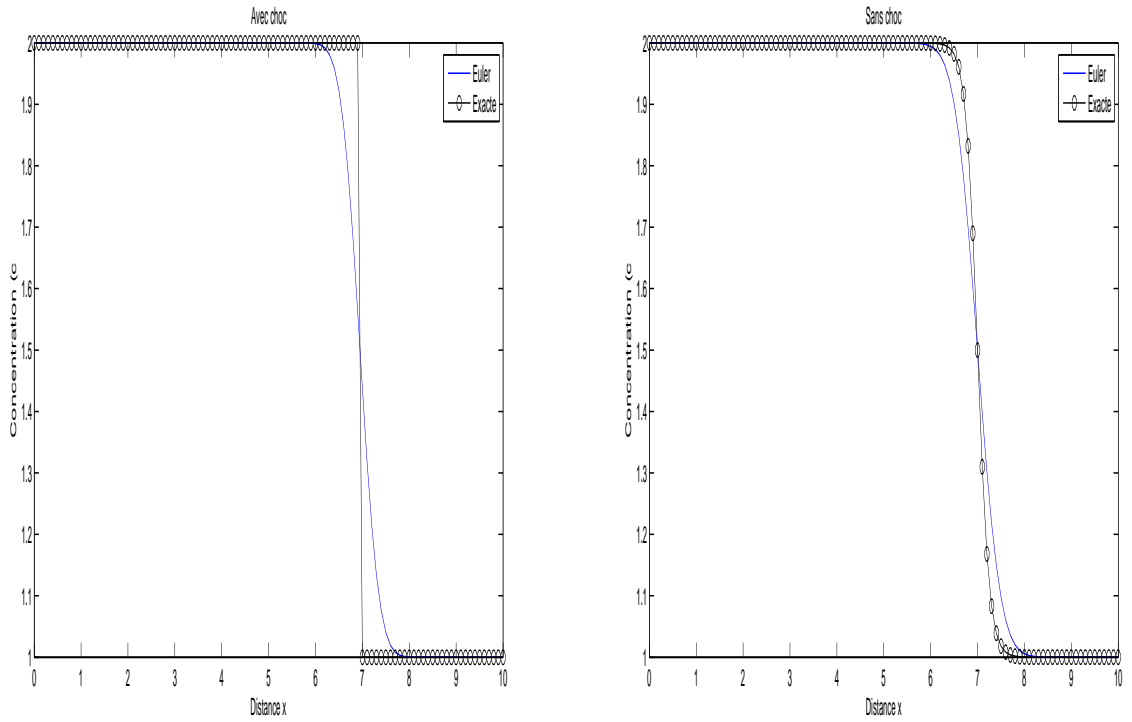


FIGURE 2.3 – La solution exacte et la solution approchée de l'équation (2.11) par méthode Euler (avec ou sans choc) avec  $\Delta x = 0.1$  et nombre de point  $n = 101$

$\Delta x$ \ $ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.1	0.2507		0.27		0.4373	
0.05	0.1801	0.4772	0.2309	0.2257	0.5	-0.1933
0.025	0.1267	0.5074	0.1932	0.2572	0.5	1
0.0125	0.0891	0.5079	0.1615	0.2586	0.4777	0.0698

TABLE 2.5 – Résolution de l'équation de transport avec choc pour la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence.



$\Delta x \backslash ER \text{ et } p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.1	0.1343		0.1156		0.1350	
0.05	0.081	0.7295	0.0765	0.5956	0.1188	0.1844
0.025	0.0444	0.8674	0.0438	0.8045	0.0712	0.7386
0.0125	0.0230	0.9489	0.0228	0.9419	0.0324	1.1359
0.0125	0.0119	0.9507	0.0121	0.9140	0.0175	0.8886

TABLE 2.6 – Résolution de l'équation de transport sans choc pour la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence.

### 2.3.2 Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma de Lax-Wendroff fut le premier schéma d'ordre 2 et s'écrit de la manière suivante :

$$c_j^{n+1} = c_j^n - u \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (c_{j+1}^n - c_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{u \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n). \quad (2.16)$$

Ce schéma n'est pas TVD et peut donc créer des instabilités dans la solution, notamment dans les zones de choc. On prend la même condition initiale de l'équation (2.11) avec le schéma de Lax-Wendroff.

Dans le cas du schéma avec choc, on constate que la solution numérique s'approche de celle exacte mais elle présente des oscillations au niveau de la discontinuité.

Alors que, dans le cas du schéma sans choc, on remarque que si on diminue la valeur de  $\Delta x$ , l'ordre tend vers 2 et précisément égale à 2 pour  $\Delta x = 0.025$  avec la présence de faibles oscillations. L'utilisation de limiteur permettra d'éliminer ces oscillations.

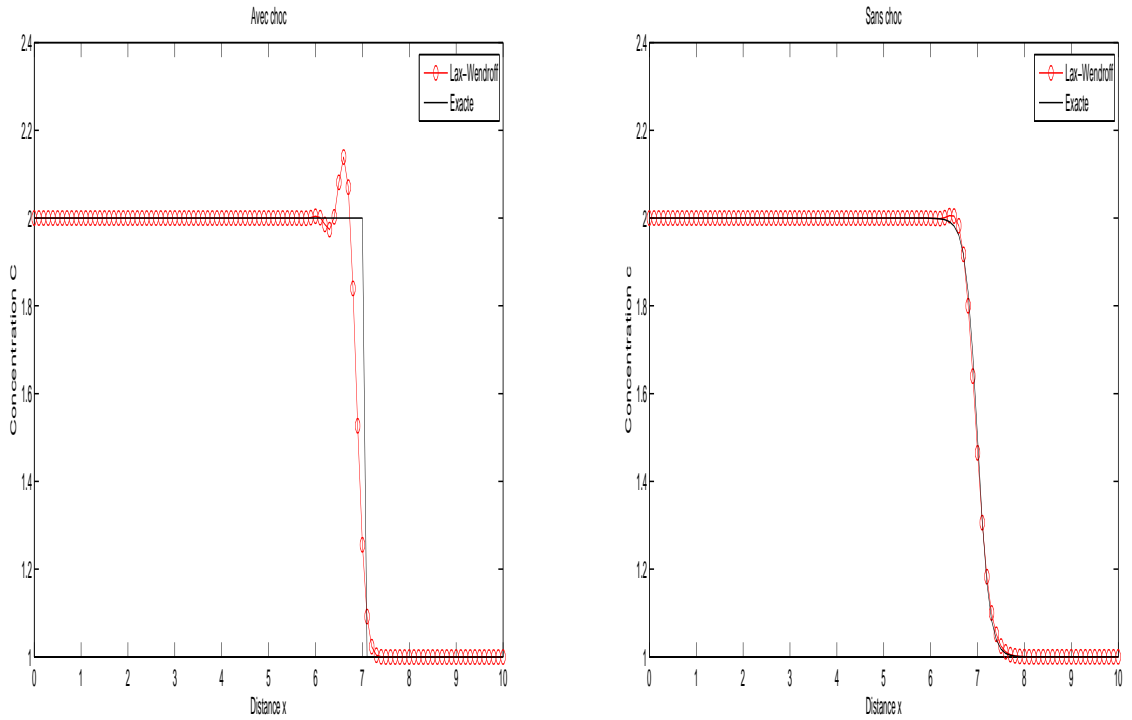


FIGURE 2.4 – La solution exacte et la solution approchée de l'éq(2.11) par le schéma de Lax-Wendroff (avec ou sans choc) avec  $\Delta x = 0.1$  et le nombre de point  $n = 101$

$\Delta x$ \ $ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.4	0.3711		0.3663		0.5486	
0.2	0.2538	0.5481	0.3205	0.1927	0.6429	-0.2288
0.1	0.1840	0.4640	0.2906	0.1413	0.7444	-0.2115
0.05	0.1123	0.7123	0.2168	0.4227	0.7271	0.339

TABLE 2.7 – Résolution de l'équation de transport avec choc pour le schéma de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta x \backslash ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.4	0.1848		0.1280		0.1155	
0.2	0.0743	1.3145	0.0676	0.9210	0.1008	0.2370
0.1	0.0243	1.6124	0.0258	1.3897	0.0500	1.0115
0.05	0.0072	1.7549	0.0079	1.7074	0.0169	1.5649
0.025	0.0018	2	0.0021	1.9115	0.0047	1.8463

TABLE 2.8 – Résolution de l'équation de transport sans choc pour le schéma de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence.

### 2.3.3 Résolution par schéma de Lax-Wendroff avec limiteur

Afin de contrôler les oscillations près d'une discontinuité de la solution, on adopte les techniques de limiteurs de flux. Le processus des limiteurs est compliqué du fait que la solution d'un système hyperbolique se compose typiquement d'une superposition des ondes pour différentes familles de caractéristiques. Certains de ces ondes, passant par un point à un temps indiqué, peuvent être continues tandis que d'autres sont discontinues. On applique ainsi les limiteurs de telle façon que la partie discontinue de la solution reste non oscillatoire, tandis que la partie continue reste précise. Cette idée on la trouve en particulier dans les premiers travaux de Harten et Zwas [13]. Le principe de la construction d'un schéma limité a été introduit par Randall J. Leveque [20].

#### 2.3.3.1 Méthode limiteur de flux

La méthode limiteur de flux se traduit par le couplage entre le schéma de Lax-Wendroff et celui d'Euler. Ce couplage donne le flux numérique suivant :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi_{i+\frac{1}{2}}^D + \varphi_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^D),$$

d'où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = u c_i^n + \frac{u}{2} \left(1 - u \frac{dt}{dx}\right) \delta_{i+\frac{1}{2}}^n,$$

avec  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^D$  est le flux de schéma décentré et  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW}$  est le flux de Lax-Wendroff.

En ajoutant le terme anti diffusion limitée par la fonction positive  $\varphi$  au flux d'origine. L'utilisation de la méthode de limiteur de flux est basée sur des différents choix de  $\delta_{i+\frac{1}{2}}^n$  comme une version limitée.  $\delta_{i+\frac{1}{2}}^n$  est de la forme suivante :

$$\delta_{i+\frac{1}{2}}^n = \varphi(\theta_{i+\frac{1}{2}}^n) (c_{i+1}^n - c_i^n), \quad (2.17)$$

avec  $\theta$  désigne la pente de la variable dans chaque cellule

$$\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{c_{i+1}^n - c_i^n}, \quad (2.18)$$

Plus généralement, on peut concevoir une fonction de limiteur  $\varphi$  qui a des valeurs proches de 1 pour  $\theta$  proche de 1, mais qui diminue la pente et par suite les solutions ne sont pas lisses.

Il y a plusieurs façons de mesurer la régularité en plus de la variable défini en (2.19). Cependant, le cadre proposé ci-dessous conduit à des formules très simples pour  $\varphi$ , la fonction correspondant à de nombreuses méthodes classiques, dont toutes les méthodes étudiées jusqu'à ici.

En particulier, la fonction la plus pratique est de choisir :

$$\varphi(\theta) = \theta, \quad (2.19)$$

donc les résultats dans (2.17) deviennent

$$\delta_{i+\frac{1}{2}}^n = c_i^n - c_{i-1}^n.$$

Par conséquent, le flux (2.17) avec le choix limiteur (2.19) se réduit au flux décentré.

Parmi les limiteurs de flux on cite ces trois limiteurs qu'on a utilisé dans ce présent travail à savoir :

limiteur Minmod

$$\varphi(\theta) = \minmod(1, \theta),$$

où Minmod est la fonction définie par

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } |a| < |b| \text{ et si } ab > 0 \\ b, & \text{si } |b| < |a| \text{ et si } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab < 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

limiteur Superbee

$$\varphi(\theta) = \max(\theta, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)),$$

limiteur Koren

$$\psi(r) = \max(0, \min(\frac{1+2r}{3}, \min(2r, 2))).$$

### 2.3.3.2 Résultats numériques avec plusieurs limiteurs

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution de l'équation de transport (2.11) en utilisant la technique de limiteur de flux avec les deux étapes prédicteur correcteur du schéma de Lax-Wendroff

$$\begin{cases} c_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{c_j^n + c_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t u}{2} \frac{c_{j+1}^n - c_j^n}{\Delta x} \\ c_j^{n+1} = c_j^n - u \Delta t \left( \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^* - c_{j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x} \right). \end{cases} \quad (2.21)$$

On choisit maintenant de prendre une condition initiale discontinue :

$$c_0(x) = \begin{cases} c_g = 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ c_d = 1, & \text{si } 50 < x \leq 100. \end{cases} \quad (2.22)$$

On compare les résultats obtenus par le schéma Lax Wendroff avec plusieurs limiteurs. La simulation numérique est effectuée sur un maillage de 799 points. Vu que ce maillage présente une valeur proche de l'ordre 2, le pas de temps est fixé de façon à ce que la condition de stabilité soit satisfaite. Ces calculs sont réalisés pour une  $CFL = 5.e^{-1}$  FIGURE 2.5 obtenus à  $t = 20$ , la solution analytique et la solution numérique avec limiteur Koren se superposent exactement bien que l'ordre égale à 2. Quand on compare ces résultats à ceux obtenus par un limiteur Minmod et Superbee, on obtient des erreurs numériques plus faibles et des ordres convergents vers 2 comme il est indiqué dans TABLE 2.9 et TABLE 2.11.

$\Delta x$ \ $ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
1	0.3876		0.1232		0.0553	
0.5	0.1124	1.7859	0.0385	1.6781	0.0188	1.5565
0.25	0.0352	1.6750	0.0117	1.7183	0.0057	1.7217
0.125	0.0113	1.6393	0.0040	1.5484	0.0026	1.1325

TABLE 2.9 – Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur MinMod : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta x$ \ $ER$ et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
1	0.2212		0.0827		0.0574	
0.5	0.0820	1.4317	0.0319	1.3743	0.0231	1.3132
0.25	0.205	2	0.0082	1.9599	0.0064	1.8517
0.125	0.005	2.0356	0.0020	2.0356	0.0016	2

TABLE 2.10 – Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur Koren : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta x$ \ ER et p	Erreur $L^1$	ordre p	Erreur $L^2$	ordre p	Erreur $L^\infty$	ordre p
1	0.1724		0.0690		0.0409	
0.5	0.1915	-0.1516	0.0678	0.253	0.0348	0.2330
0.25	0.0622	1.6224	0.0231	1.5534	0.0139	1.3240
0.125	0.0159	1.9679	0.0062	1.8976	0.0047	1.5644

TABLE 2.11 – Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur Superbee : Erreurs et ordres de convergence.

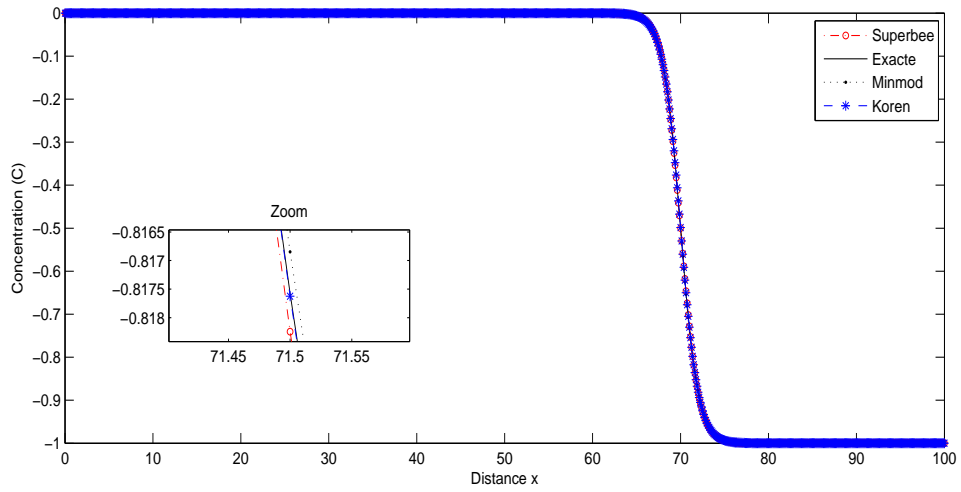


FIGURE 2.5 – Solution exacte et solution approchée de l'équation (2.11) avec le schéma de Lax-Wendroff limité par Superbee sans choc telque  $CFL = 5.e - 1$ , nombre du points  $n = 799$

## 2.4 Résolution de l'équation de transport avec terme source

On considère l'équation de transport avec terme source suivante :

$$\partial_t c + u \partial_x c = \frac{F(c)}{h}, \quad (2.23)$$

où  $\frac{F(c)}{h} = \frac{ac+b}{dc+e}$ .

On prend la condition initiale discontinue (2.22). Pour réaliser les simulations

numériques de ce problème dans le cas d'ordre 1, on utilise le schéma d'Euler pour résoudre les deux équations (2.10) et (2.6), mais dans le cas d'ordre 2, on utilise le schéma Runge-Kutta pour résoudre l'équation (2.10) puis on prend le schéma Lax-Wendroff dans l'équation (2.6). Les calculs ont été effectués sur un maillage comportant 799 points et les résultats sont donnés à  $t = 2$ . Dans FIGURE 2.6, on constate que la solution du schéma d'ordre 1 donne des erreurs trop importantes et par suite des valeurs éloignées de l'ordre 1. Par contre, on peut dire que la solution du schéma d'ordre 2 est plus favorable que celle du schéma d'ordre 1 (TABLE 2.12 et TABLE 2.13).

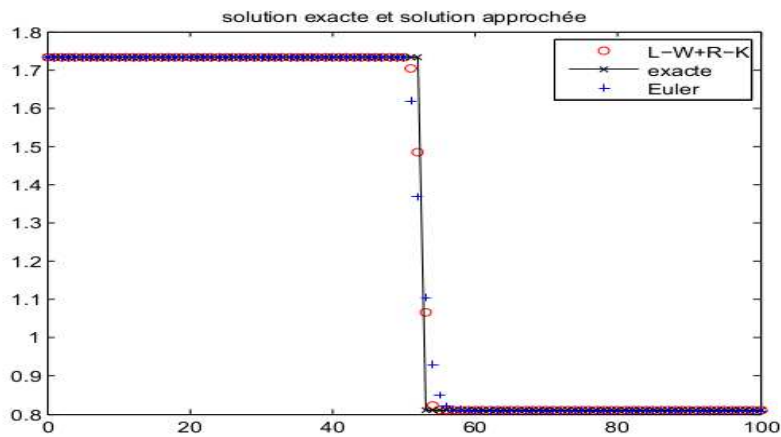


FIGURE 2.6 – Solution exacte et solution approchée de l'équation (2.23) avec les schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 tel que  $CFL = 5.e - 1$ , nombre du points  $n = 99$ .



$\Delta x$ \ ER et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.5	0.7136		0.4268		0.3940	
0.25	0.5058	0.4965	0.3619	0.2380	0.4008	-0.0247
0.125	0.3557	0.5079	0.3057	0.2435	0.4195	-0.0658
0.625	0.2501	0.5082	0.2578	0.2459	0.4397	-0.0678

TABLE 2.12 – Résolution de l'équation (2.23) par la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence.

$\Delta x$ \ ER et $p$	Erreur $L^1$	ordre $p$	Erreur $L^2$	ordre $p$	Erreur $L^\infty$	ordre $p$
0.5	0.3554		0.2952		0.3041	
0.25	0.2234	0.6698	0.2426	0.2831	0.3748	-0.3016
0.125	0.1380	0.6950	0.1938	0.3240	0.4051	-0.1122
0.625	0.0849	0.7008	0.1519	0.3514	0.4117	-0.0233

TABLE 2.13 – Résolution de l'équation (2.23) par la méthode de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence.

## 2.5 Application du Modèle NPZD

### Modèle biologique type NPZD

#### Définition

NPZD est un système biologique naturel composé de quatre composants :

Nutriments et phytoplancton sont indispensables pour représenter le premier niveau du réseau trophique. Un composant zooplancton semble aussi indispensable pour représenter les consommateurs primaires et la dynamique de population. Le zooplancton est aussi prépondérant dans la formation des pelotes fécales. Enfin, un composant représentant les détritux est indispensable, puisque c'est cette variable d'état qui, en sortie du modèle, permettra la comparaison entre simulations

et données sédimentaires. On obtient donc un modèle minimal à quatre composants, NPZD (Nutriments, Phytoplancton, Zooplancton et Détritus).

La structure du modèle est présentée dans FIGURE 2.7 ci-après qui indique l'interaction entre les quatre composants :

$F_N$  = absorption +  $Z$  excrétion +  $Z$  l'excrétion prédation +  $D$  reminéralisation + mélange.

$F_P$  = absorption - respiration - Broutage par les  $Z$  - naufrage - mélange.

$F_Z$  = évolution - prédation.

$F_D$   $P$  respiration +  $Z$  pelotes fécales - reminéralisation - naufrage - mélange.

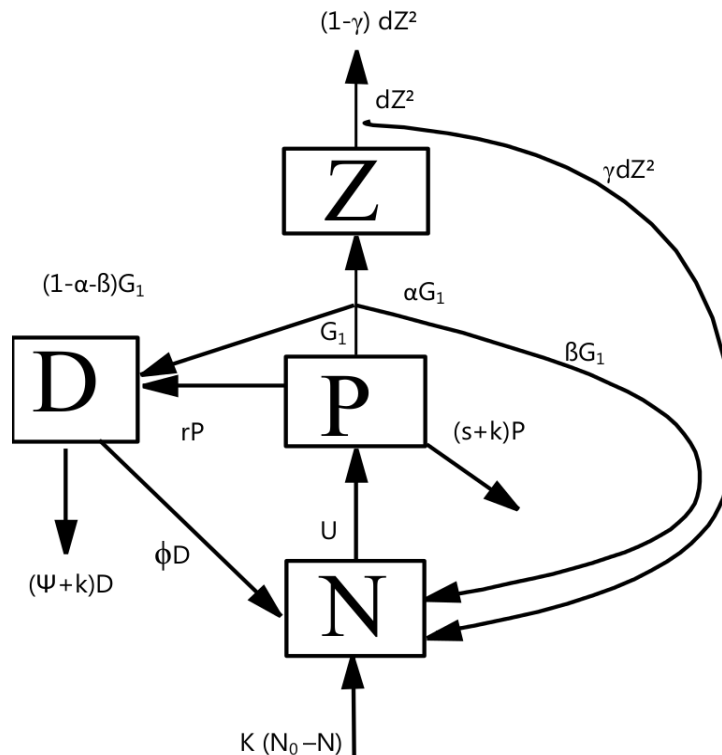


FIGURE 2.7 – Schéma conceptuel du modèle couplé NPZD

Formulations mathématiques

La modélisation mathématique de l'évolution au cours du temps des variables d'état associées aux différents processus du schéma conceptuel présenté ci-dessus est donnée par les équations suivantes :

$$F_N = -\frac{N}{e+N} \frac{a}{b+cP} P + \frac{\beta P^2}{\mu^2 + P^2} Z + \gamma dZ^2 + \phi D + k(N_o - N) \quad (2.24)$$

$$F_P = \frac{N}{e+N} \frac{a}{b+cP} P - r P - \frac{P^2}{\mu^2 + P^2} Z - (s+k) P. \quad (2.25)$$

$$F_Z = \frac{\alpha P^2}{\mu^2 + P^2} Z - d Z^2. \quad (2.26)$$

$$F_D = r P + (1 - \alpha - \beta) \frac{P^2}{\mu^2 + P^2} Z - (\phi + \psi + k) D. \quad (2.27)$$

Paramètres

Les paramètres utilisés sont donnés dans TABLE 2.14 suivant :

Paramètres	Valeurs	Valeurs citées
a	$0.2 \text{ m}^{-1} \text{ jour}^{-1}$	0.07-0.28
b	$0.2 \text{ m}^{-1}$	0.04-0.2
c	$0.4 \text{ m}^2 (\text{gC})^{-1}$	0.3-1.2
d	$1.0 \text{ m}^3 (\text{gC})^{-1} \text{ jour}^{-1}$	0.25-2.0
e	$0.03 \text{ g C m}^{-3}$	0.02-0.15
k	$0.05 \text{ jour}^{-1}$	0.0008-0.13
r	$0.15 \text{ jour}^{-1}$	0.05-0.15
s	$0.04 \text{ jour}^{-1}$	0.032-0.08
$N_0$	$0.6 \text{ g C m}^{-3}$	0.1-2.0
$\alpha$	0.25	0.2-0.5
$\beta$	0.33	0.33-0.8
$\gamma$	0.5	0.5-0.9
$\lambda$	$0.6 \text{ jour}^{-1}$	0.6-1.4
$\mu$	$0.035 \text{ g C m}^{-3}$	0.02-0.1
$\phi$	$0.1 \text{ jour}^{-1}$	0.004-0.2
$\psi$	$0.08 \text{ jour}^{-1}$	0.08-0.8

TABLE 2.14 – Valeurs des paramètres

Cette partie développe l'application du modèle NPZD [9]. Ainsi l'équation (2.23)

devient

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{F(c)}{h} = G(N, P, Z, D),$$

où  $c$  est la concentration de la variable  $N$  ou  $P$  ou  $Z$  ou  $D$  et la fonction  $G(N, P, Z, D)$  est donnée respectivement par les équations (2.24)-(2.27). Pour la simulation numérique de ce problème on prend en considération les valeurs initiales

$$P_0 = \begin{cases} P_g = 0.1 & \text{si } x \leq 50 \\ P_d = 0.034 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$N_0 = \begin{cases} N_g = 0.4 & \text{si } x \leq 50 \\ N_d = 0.033 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$Z_0 = \begin{cases} Z_g = 0.05 & \text{si } x \leq 50 \\ Z_d = 0.072 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$D_0 = \begin{cases} D_g = 3 & \text{si } x \leq 50 \\ D_d = 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.31)$$

On présente ici les résultats obtenus pour une  $CFL = 0.5$  avec un maillage à 199 points pour un temps d'exécution égal à  $t = 2s$  (voir FIGURE 2.8).

On a présenté dans le paragraphe précédent le modèle numérique du transport des organismes biologiques NPZD. Ce modèle permet de calculer l'évolution spatio-temporelle liée à l'advection de la concentration dans l'eau d'un traceur biologique  $c(t, x)$  est donnée par l'équation de conservation (2.23), par exemple la concentration en détritrus dans l'eau, dans 1D, à partir de la vitesse  $u$ .

Maintenant, on considère le modèle qui permet de calculer l'évolution temporelle

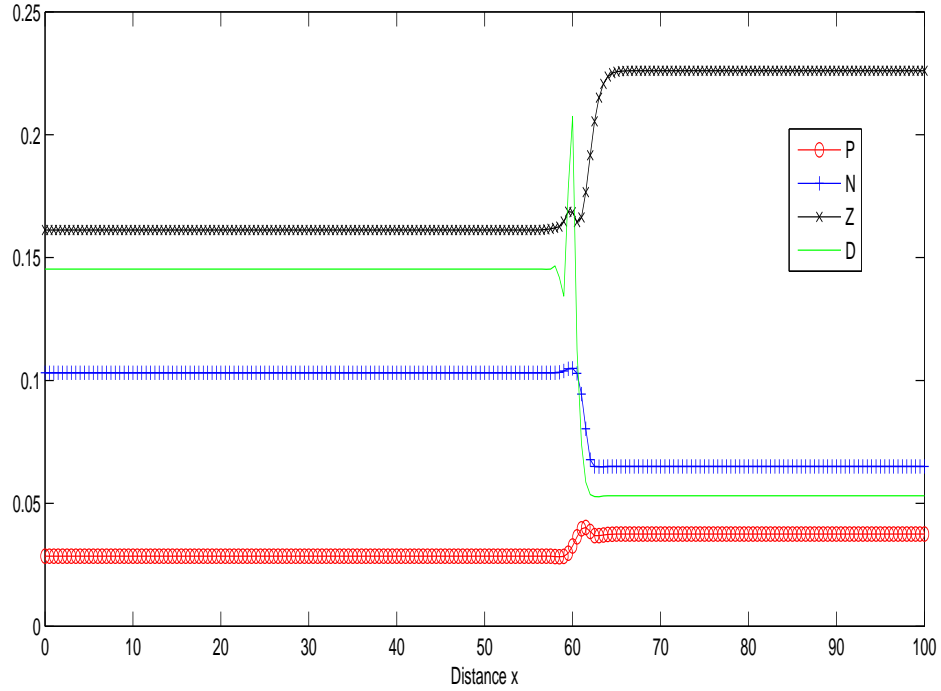


FIGURE 2.8 – Solutions approchées de l'équation (2.23) (NPZD) pour le schéma de Lax-Wendroff limité par Koren avec  $CFL = 0.5$  et nombre du points  $n = 199$

due aux processus physiques de l'équation advection-diffusion et aux processus biologiques de la concentration d'un traceur alors l'équation s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + G(N, P, Z, D), \quad (2.32)$$

où  $\mathcal{D}$  représente un coefficient de diffusion ou de viscosité. Les termes advection et diffusion dépendent principalement de l'hydrodynamique. Le terme source présente les flux biologiques calculés par un modèle décrivant les interactions entre les différents composants vivants.

### Diffusion numérique

Afin d'introduire les notions d'équation de convection-diffusion. Par exemple on

considère le schéma aux volumes finis décentré (2.12) de l'équation scalaire de convection (2.11). A cause des erreurs de discrétisation, la solution exacte de l'équation discrétisée (2.12), ne satisfait pas exactement l'équation continue de départ (2.11) pour des valeurs finies de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

L'équation convection-diffusion diffère de l'équation différentielle de départ par le terme d'erreur de troncature ainsi que la différence entre l'équation initiale (2.11) et l'équation discrétisée (2.12).

Par des développements de Taylor, on peut évaluer l'erreur de troncature  $E_T$  :

$$\begin{aligned} E_T &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\right)_i^n - \left(\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta x}\right) \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right)_i^n - u \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \end{aligned}$$

Puisque la solution exacte de l'équation discrétisée (2.12), ce terme peut se ré-écrire sous la forme :

$$E_T = u \frac{\Delta x}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2).$$

Noton  $\tilde{c}_i^n$  la solution exacte de l'équation discrétisée (2.12), on a :

$$\left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}\right)_i^n = E_T = u \frac{\Delta x}{2} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2).$$

Ce qui montre que la solution exacte de l'équation discrétisée ne satisfait pas exactement l'équation différentielle initiale pour les valeurs finies de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

Ainsi pour le schéma numérique défini par (2.12), l'équation convection-diffusion prend la forme :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = u \frac{\Delta x}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Le coefficient de viscosité est donc  $\mathcal{D} = u \frac{\Delta x}{2} (1 - \nu)$ . Pour la simulation numérique du problème (2.32) on prend en considération les mêmes valeurs initiales

du premier modèle (2.28)-(2.31). On présente ici les résultats obtenus pour une  $CFL = 0.5$  avec un maillage à 199 points pour un temps d'exécution égal à  $t = 2s$ . Plus le terme de diffusion  $\mathcal{D}$  est grand pour un schéma, plus ce schéma est dit diffusif. En particulier, les discontinuités seront plus étalées (voir FIGURE 2.9).

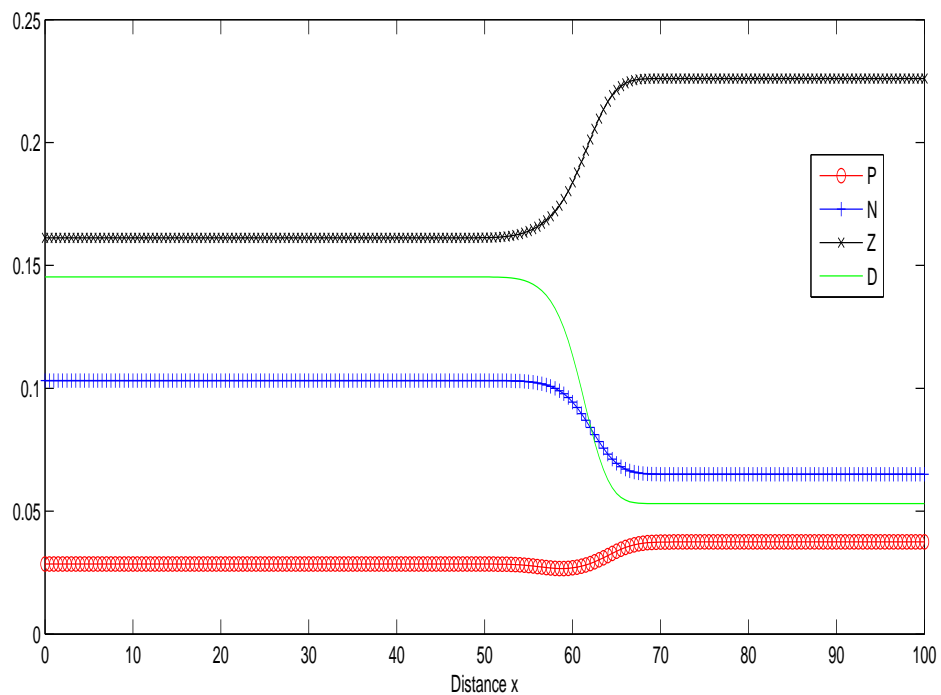


FIGURE 2.9 – Solutions approchées (NPZD) de l'équation advection-diffusion (2.32) pour le schéma de Lax-Wendroff limité par Koren avec  $CFL = 0.5$  et nombre de points  $n = 199$





# Chapitre 3

## Résolution du modèle Saint-Venant avec transport de traceur ou une dynamique biologique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Transport de traceur inerte . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1.1	Description du modèle physique . . . . .	42
3.1.2	Description de la méthode numérique . . . . .	43
3.1.3	Quelques résultats numériques obtenus . . . . .	45
<b>3.2</b>	<b>Étude du modèle Saint-Venant couplé à la dynamique biologique (modèle NPZD) . . . . .</b>	<b>50</b>
3.2.1	Description de la méthode numérique . . . . .	50
3.2.2	Quelques résultats numériques obtenus . . . . .	57

---

Ce chapitre vise à décrire les travaux effectués avec le schéma de Lax-Wendroff. On présente quelques résultats relatifs au transport en premier abord d'un traceur inerte et ensuite le transport des organismes biologiques NPZD en 1D, en utilisant notamment une méthode de limitation de flux. L'objectif de cette étude est de mettre au point une méthode numérique précise non-oscillatoire pour le calcul des

solutions approchées avec des conditions initiales discontinues sur les écoulements à surface libre en présence d'un traceur biologique.

## 3.1 Transport de traceur inerte

### 3.1.1 Description du modèle physique

Dans la présente étude, On va s'intéresser aux flux à densité variable survenant en eau peu profonde à surface libre. Le modèle à une dimension est écrit sous la forme conservative comme suit :

$$\partial_t(\rho h) + \partial_x(\rho hu) = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t(\rho hu) + \partial_x(\rho hu^2 + \frac{g \rho h^2}{2}) = 0, \quad (3.2)$$

$h$ ,  $u$  sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'eau et  $g$  la gravité.

La densité  $\rho$  est donnée par :

$$\rho = \rho_w + (\rho_c - \rho_w)c, \quad (3.3)$$

où  $\rho_c$  est la densité du traceur avec  $\rho_c > \rho_w$  et  $c$  est la concentration du traceur. L'équation de conservation de la masse qui correspond au transport par convection et diffusion de la concentration  $c$  avec la fonction dynamique biologique est inerte s'écrit comme suit :

$$\partial_t(hc) + \partial_x(huc) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c), \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{D}$  est le coefficient de diffusion.

Pour simplifier la présentation on utilise une approximation de Boussinesq pour la dépendance de la densité. La formulation différentielle des équations de masse

qui régissent les fluides est donnée par :

$$\partial_t(\rho) + u \partial_x(\rho) = 0.$$

On obtient alors le système couplé suivant :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (3.5)$$

$$\partial_t hu + \partial_x(hu^2 + \frac{g h^2}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho} g h^2 \partial_x c \quad (3.6)$$

$$\partial_t(hc) + \partial_x(huc) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c). \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Description de la méthode numérique

Le système des équations (3.5) – (3.7) peut être écrit sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = \mathcal{Q}, \quad (3.8)$$

où  $W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hc \end{pmatrix}$  est la variable conservative,

$F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \\ huc \end{pmatrix}$  est le flux physique,

et

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho} g h^2 \frac{\partial c}{\partial x} \\ \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c) \end{pmatrix} = S + S_d = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho_c - \rho_w}{\rho} g h^2 \frac{\partial c}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x c) \end{pmatrix} \text{ est}$$

le terme source.

Les équations (3.5)-(3.7) peuvent être reformulées sous la forme non-conservative :

$$\partial_t W + A(W) \partial_x W = \mathcal{Q}, \quad (3.9)$$

où  $A(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & 0 \\ -uc & c & u \end{pmatrix}$ .

Ainsi la méthode des volumes finis avec le flux de Lax-Friedrichs appliquée au système (3.5)-(3.7) nous permet d'avoir l'équation discrétisée suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t S_i^n + \Delta t S_{di}^n. \quad (3.10)$$

On utilise une technique classique de fractionnement d'opérateur pour traiter le terme source  $S_d$  de l'équation (3.10) (voir par exemple [6]).

$$W_i^{*n} = W_i^n + \Delta t S_{di}^n \text{ (splitting),}$$

$$W_i^{n+1} = W_i^{*n} - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t S_i^n, \quad (3.11)$$

avec  $\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = [F(W_i^{*n}) + F(W_{i+1}^{*n})] - \frac{p}{r}[W_{i+1}^{*n} - W_i^{*n}]$ ,

avec  $p = \frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$ .

Le calcul des flux numériques dans le schéma de Lax-Wendroff est effectué en utilisant une procédure prédicteur-correcteur du type :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t S_i^n + \Delta t S_{di}^n, \quad (3.12)$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}[F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)] - \frac{r}{2} A(\nu(W_i^n, W_{i+1}^n))[F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)],$$

où  $\nu(W_i^n, W_{i+1}^n)$  est l'état moyen défini par :

$$\nu(W_i^n, W_{i+1}^n) = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ c_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_i+h_{i+1}}{2} \\ \frac{u_i+u_{i+1}}{2} \\ \frac{c_i+c_{i+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

### 3.1.3 Quelques résultats numériques obtenus

Les principaux objectifs de cette section sont en particulier l'illustration sur des exemples tests les performances numériques de la méthode des volumes finis décrite précédemment et numérique de ses capacités à résoudre des modèles couplés Saint-Venant et transport de traceur (3.5)-(3.7). Dans ce paragraphe tous les calculs sont effectués pour le nombre de Courant Friedrichs-Lewy CFL égal à 0.1. Le pas de temps  $\Delta t$  est ajusté à chaque étape en fonction de la condition de stabilité qui est défini selon la formule suivante :

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max_{k=1,\dots,3}(|\lambda_k^n|)},$$

où  $\lambda_k (k = 1, \dots, 3)$  sont les valeurs propres du système (3.5)-(3.7).

On considère une densité variable avec une discontinuité initiale due à la discontinuité de la concentration du traceur (3.3), en effet pour la concentration on prend la condition initiale discontinue suivante :

$$c_0 = \begin{cases} c_g = 0.02 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ c_d = 0.01 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le problème consiste à résoudre les équations (3.5)-(3.7) avec conditions initiales citées ci-dessus où on a pris la densité de l'eau  $\rho_w = 1000$  et la densité du traceur  $\rho_c = 1600$ . Initialement, on prend une vitesse nulle de l'eau. On résout le système

(3.5)-(3.7) avec la viscosité  $\mathcal{D} = 10$  en utilisant un schéma de Lax-Friedrichs. On met en évidence à l'instant  $t = 5$  l'évolution de la hauteur de l'eau  $h$ , le moment  $hu$ , la vitesse  $u$  et la concentration du traceur  $c$  en utilisant un maillage avec respectivement le nombre de points  $n = 200$ ,  $n = 400$  et  $n = 1000$  dans FIGURE 3.1- FIGURE3.3. On remarque que le schéma de Lax-Friedrichs diffuse près des discontinuités, alors que la vitesse explose en  $n = 1000$ . Cette diffusion numérique est considérablement réduite en  $n = 200$ .

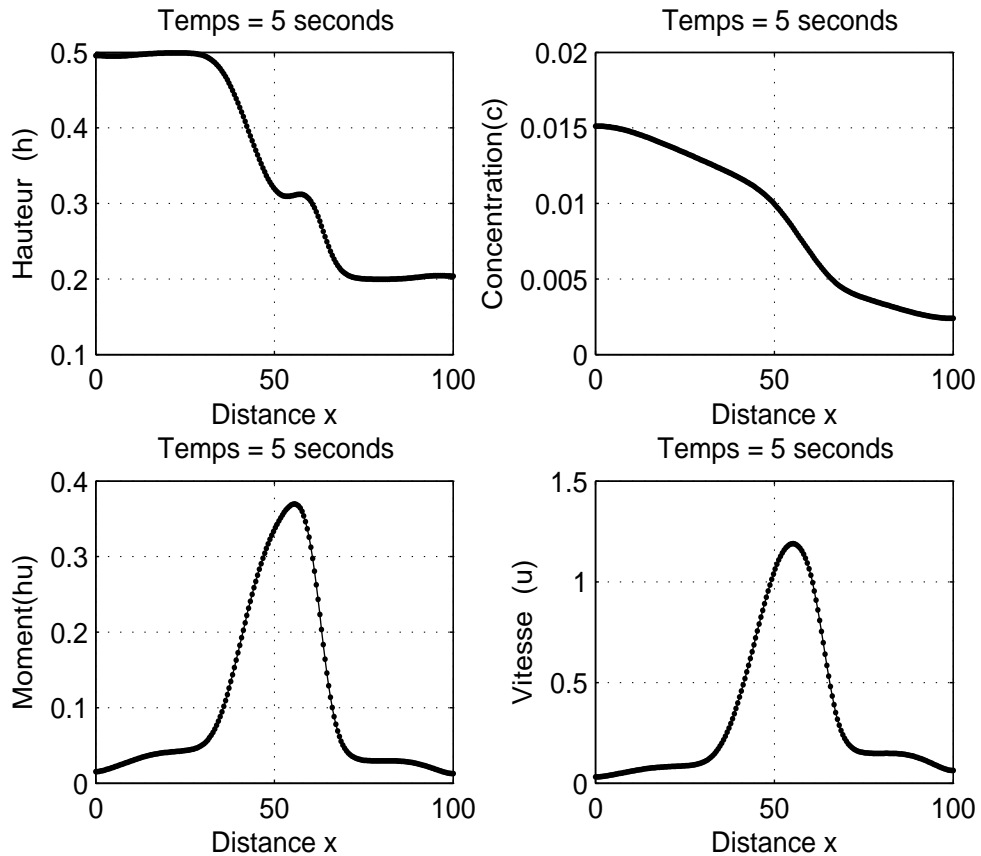


FIGURE 3.1 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Freidrichs avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 200$ .

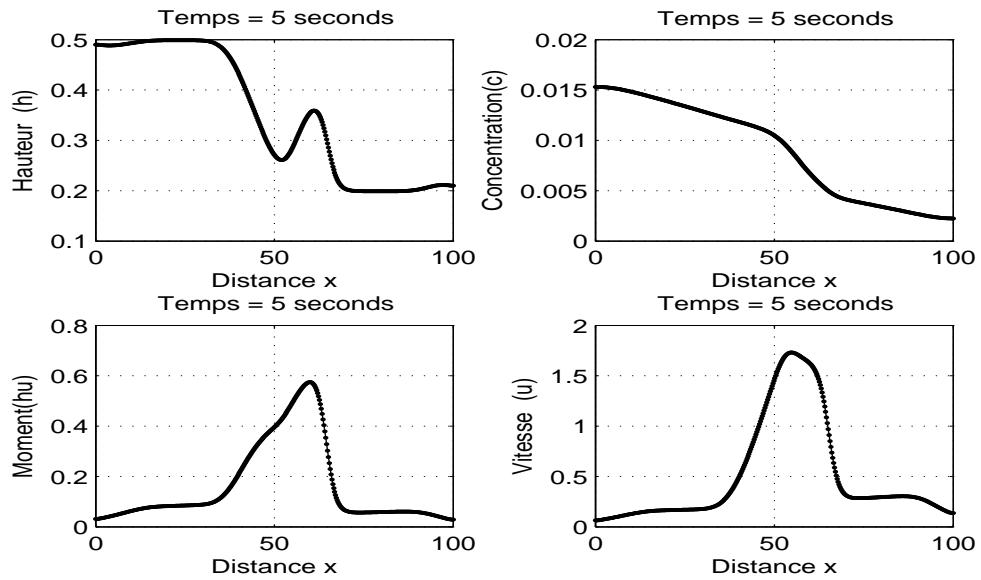


FIGURE 3.2 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Friedrichs avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 400$ .

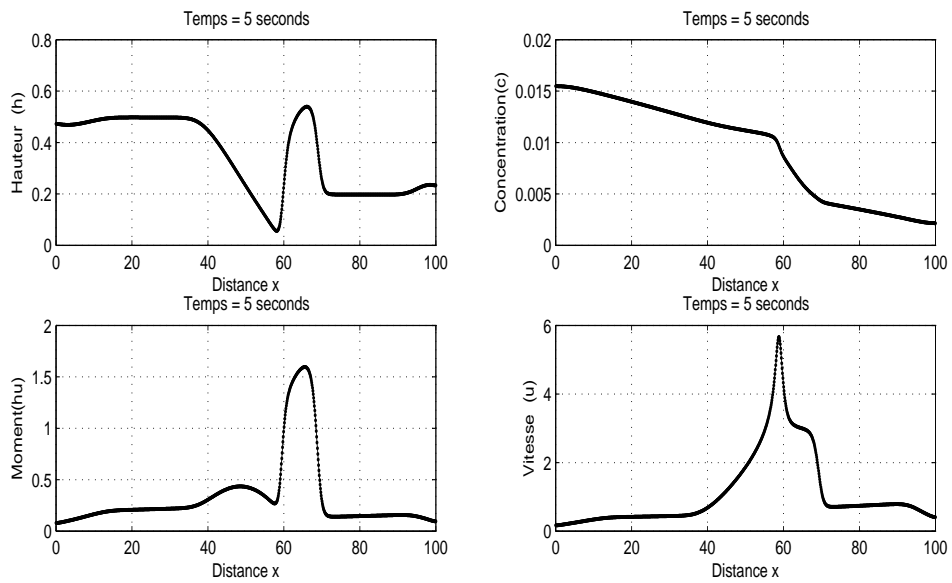


FIGURE 3.3 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Friedrichs avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 1000$ .

On a représenté aussi les résultats obtenus à l'aide du schéma de Lax-Wendroff dans FIGURE 3.4- FIGURE 3.7. On remarque que le schéma de Lax-Wendroff échoue totalement. En comparant avec le schéma Lax-Friedrichs qui présente plus de stabilité et de précision.

Un autre cas test qui est présenté ici en utilisant les limiteurs de flux Free, Van Leer, Superbee et Minmod qu'on définira à la section 3.2.1.2. On remarque que la méthode de limiteur de flux de second ordre présente des résultats précis et monotones bien équilibrés et sans parasite oscillations au niveau des discontinuités. En comparant les performances des limiteurs, le limiteur Superbee donne les meilleurs résultats, suivi par Van Leer et Minmod.

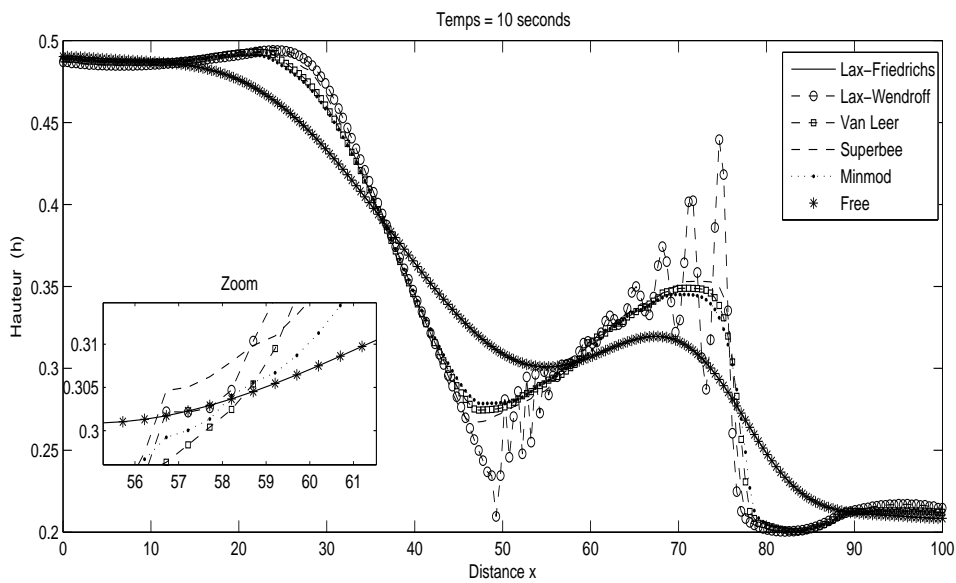


FIGURE 3.4 – Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la hauteur de l'eau avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 200$ .



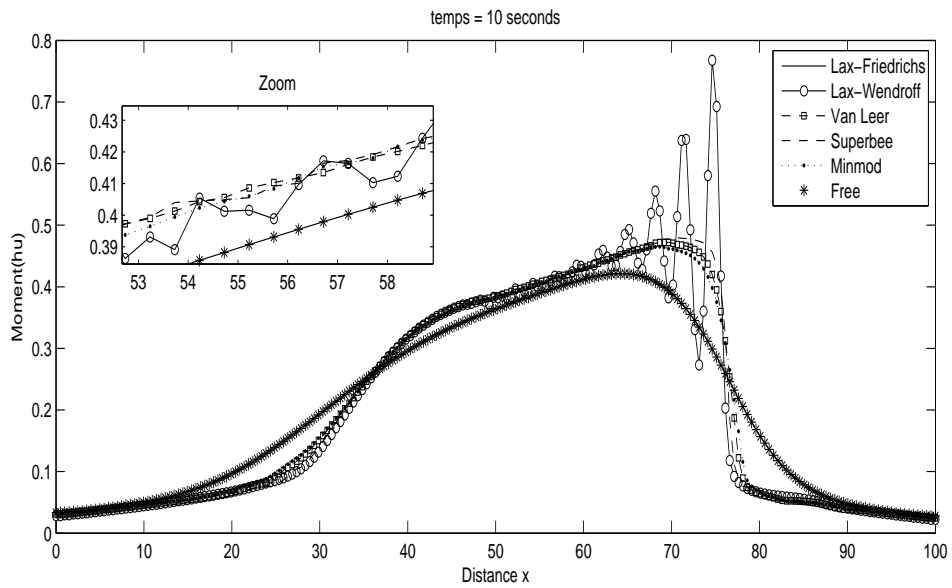


FIGURE 3.5 – Comparaison des différentes fonctions de limitation pour le moment avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 200$ .

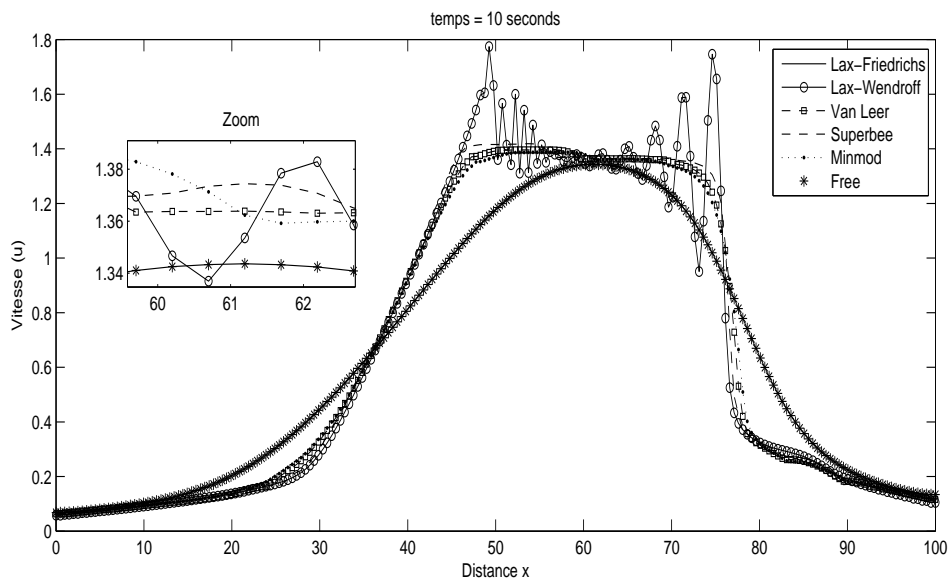


FIGURE 3.6 – Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la vitesse de l'eau avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 200$ .

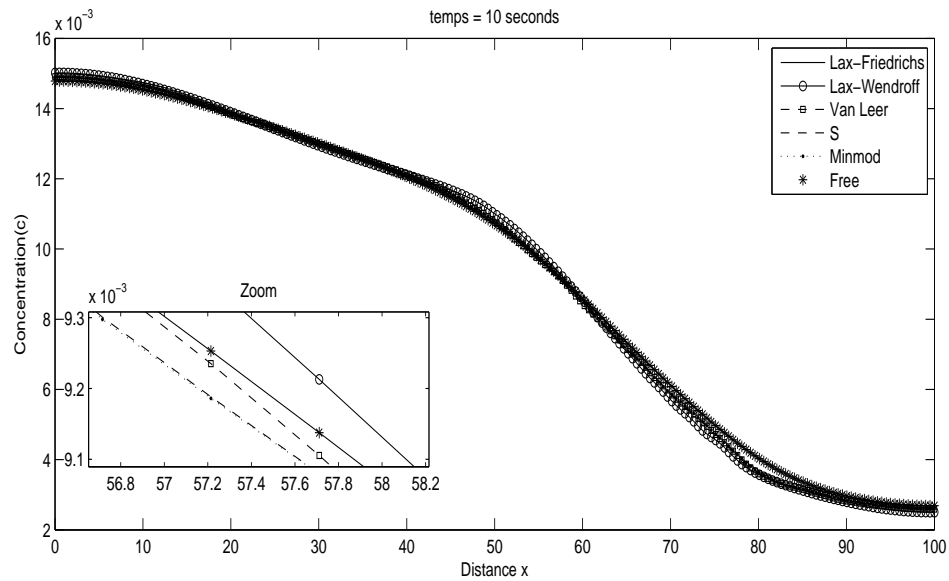


FIGURE 3.7 – Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la concentration du traceur avec  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 200$ .

## 3.2 Étude du modèle Saint-Venant couplé à la dynamique biologique (modèle NPZD)

Le modèle mathématique qu'on adoptera tout au long de cette section régissant les écoulements en eau peu profonde avec la prise en compte des organismes biologiques (NPZD) a été introduite par les équations (2.24)-(2.27) dans la section 2.5.

### 3.2.1 Description de la méthode numérique

Le couplage entre les équations du Saint-Venant et les équations de transport diffusion des organismes biologiques NPZD à savoir les équations (3.16)-(3.19) est donné sous la forme non linéaire de loi de conservation hyperbolique avec des termes sources par l'équation (3.20) :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (3.14)$$

$$\partial_t hu + \partial_x(hu^2 + \frac{g h^2}{2}) = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4), \quad (3.15)$$

$$\partial_t(hN) + \partial_x(huN) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x N) + F_N, \quad (3.16)$$

$$\partial_t(hP) + \partial_x(huP) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x P) + F_P, \quad (3.17)$$

$$\partial_t(hZ) + \partial_x(huZ) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x Z) + F_Z, \quad (3.18)$$

$$\partial_t(hD) + \partial_x(huD) = \mathcal{D} \partial_x(h \partial_x D) + F_D, \quad (3.19)$$

avec  $s_1 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_N - \rho_w}{\rho} gh^2 \partial_x N$ ,

$s_2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_P - \rho_w}{\rho} gh^2 \partial_x P$ ,

$s_3 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_Z - \rho_w}{\rho} gh^2 \partial_x Z$ ,

$s_4 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_D - \rho_w}{\rho} gh^2 \partial_x D$ ,

où  $h$  est la hauteur de l'eau,  $u$  est la vitesse de l'écoulement,  $N$ ,  $P$ ,  $Z$ ,  $D$  sont des concentrations des organismes,  $\rho_w$  est la densité d'eau,  $\rho_N$ ,  $\rho_P$ ,  $\rho_Z$  et  $\rho_D$  sont les densités des organismes biologiques,  $\rho$  est la densité du mélange fluide-traceur et  $F_N$ ,  $F_P$ ,  $F_Z$  et  $F_D$  sont des fonctions dynamiques biologiques (2.24)-(2.27) déjà présentées dans la section 2.5.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = \mathcal{Q}, \quad (3.20)$$

où  $W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hN \\ hP \\ hZ \\ hD \end{pmatrix}$  est la variable conservative,

$F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huN \\ huP \\ huZ \\ huD \end{pmatrix}$  est le flux physique,

et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x N) + F_N \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x P) + F_P \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x Z) + F_Z \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x D) + F_D \end{pmatrix} = S + S_d + S_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x N) \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x P) \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x Z) \\ \mathcal{D} \partial_x (h \partial_x D) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_N \\ F_P \\ F_Z \\ F_D \end{pmatrix} \text{ est le terme source.}$$

Afin de calculer la matrice jacobienne, on exprime le système d'équations sous la forme non-conservative :

$$\partial_t W + A(W) \partial_x W = \mathcal{Q}, \quad (3.21)$$

où la matrice jacobienne du système est  $A(W) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -uN & N & u & 0 & 0 & 0 \\ -uP & P & 0 & u & 0 & 0 \\ -uZ & Z & 0 & 0 & u & 0 \\ -uD & D & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A(W)$  sont :  $\lambda_{1,2,3,4} = u$ ,  $\lambda_5 = u - \sqrt{gh}$  et  $\lambda_6 = u + \sqrt{gh}$ .

Des résultats numériques de la résolution du problème de transport de composants biologiques seront présentés à la section 2.5 pour diverses conditions initiales discontinues.

### 3.2.1.1 Etude par la méthode des volumes finis

On discrétise l'équation (3.20) comme déjà montrée dans la section 2 du chapitre 1. On discrétise l'espace en cellules  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  de même longueur  $\Delta x$ . On subdivise aussi l'intervalle de temps en  $[t_n, t_{n+1}]$  de taille uniforme  $\Delta t$ . Ici  $t_n = n \Delta t$ ,  $x_i = i \Delta x$ .

En intégrant l'équation par rapport au temps et à l'espace sur le domaine temps-espace  $\theta = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ . On obtient l'équation discrète suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t Q_i^n. \quad (3.22)$$

Pour traiter les conditions de source (voir par exemple [4]), on fait un splitting : on résout

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S_b. \quad (3.23)$$

Après la résolution de l'équation (3.23) où on a gardé seulement la source  $S_b$  et là on prend en considération le variable obtenue  $W^*$ . On peut toutefois faire à ce niveau un deuxième splitting en résolvant tout d'abord sans la partie diffusive de la source donc on obtient  $W^{**}$ , et après on aura qu'à résoudre l'équation  $\frac{\partial W^{**}}{\partial t} = S_d$ .

On a  $W_i^{*n} = W_i^n + \Delta t S_{bi}^n$ ,

$$W_i^{**n} = W_i^{*n} + r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n + \Delta t S_i^n],$$

et  $W_i^{n+1} = W_i^{**n} + \Delta t S_{di}^n$ , donc

$$W_i^{n+1} = W_i^n + r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t S_i^n + \Delta t S_{bi}^n + \Delta t S_{di}^n. \quad (3.24)$$

En général, cette reconstruction nécessite une solution de Riemann de problèmes au niveau des interfaces  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ . Supposons que la solution du problème de Riemann

associé à l'équation (3.20) à la condition initiale suivante:

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_l & \text{si } x < 50 \\ W_r & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Le calcul des flux numériques dans le schéma de Lax-Wendroff est effectué en utilisant une procédure prédicteur-correcteur du type :

$$\begin{cases} W_i^{n+1} = W_i^n - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t Q_i^n \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}[F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)] - \frac{r}{2}A(\nu(W_i^n, W_{i+1}^n))[F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)], \end{cases}$$

où  $\nu(W_i^n, W_{i+1}^n)$  est l'état moyen défini par :

$$\nu(W_i^n, W_{i+1}^n) = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}} \\ u_{i+\frac{1}{2}} \\ N_{i+\frac{1}{2}} \\ P_{i+\frac{1}{2}} \\ Z_{i+\frac{1}{2}} \\ D_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_i+h_{i+1}}{2} \\ \frac{u_i+u_{i+1}}{2} \\ \frac{N_i+N_{i+1}}{2} \\ \frac{P_i+P_{i+1}}{2} \\ \frac{Z_i+Z_{i+1}}{2} \\ \frac{D_i+D_{i+1}}{2} \end{pmatrix},$$

où  $W_i$  est le résultat d'un splitting effectué à l'étape prédicteur.

### 3.2.1.2 Limitation de flux pour les équations de transport du modèle NPZD

Pour limiter numériquement tout en conservant l'ordre 2 en dehors des discontinuités, il est intéressant de coupler le schéma de Lax-Wendroff à un schéma du premier ordre Lax-Friedrichs. On adapte les techniques de limiteurs de flux pour les équations des écoulements d'eaux peu profondes en présence des organismes biologiques. Ce couplage donne le flux numérique suivant :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF} + \varphi_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF}),$$

où  $\varphi_{i+\frac{1}{2}} = \varphi(\theta_{i+\frac{1}{2}})$  est un limiteur approprié défini à l'aide d'une fonction de limitation de flux  $\phi$  qui dépend de la quantité  $\theta_{i+\frac{1}{2}}$ ,

$$\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{W_i - W_{i-1}}{W_{i+1} - W_i}.$$

- Si,  $\varphi(\theta) = 0$  c'est le schéma Lax-Friedrichs d'ordre 1.
- Si,  $\varphi(\theta) = 1$  c'est le schéma de Lax-Wendroff d'ordre 2.

Ici, on va utiliser les limiteurs de Minmod :

$$\varphi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta)),$$

celui de Van Leer :

$$\varphi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|},$$

ainsi que celui de Van Albada :

$$\varphi(\theta) = \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2 + 1}.$$

Dans la suite on va aussi utiliser plusieurs autres limiteurs.

La construction du schéma des volumes finis avec limiteur de flux est classique et se décompose en deux étapes. Le schéma de Lax-Friedrichs et de Lax-Wendroff sont couplés de façon non linéaire, via des limiteurs de flux dépendant de la régularité locale de la solution. Dans l'étape prédicteur, les flux numériques sont



reconstruits en utilisant les variables physiques. Puis, à l'étape correcteur, la solution est mise à jour à l'aide des variables conservatives. Par conséquent, le procédé de limitation de flux est mis en œuvre comme suit :

– Étape prédicteur

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r[\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t Q_i^n.$$

– Étape correcteur

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF} + \varphi_{i+\frac{1}{2}}(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF}),$$

avec

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = \frac{1}{2}[F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)] - \frac{r}{2} A(\nu(W_i^n, W_{i+1}^n))[F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)]$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = [F(W_i^{*n}) + F(W_{i+1}^{*n})] - \frac{p}{r}[W_{i+1}^{*n} - W_i^{*n}]$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{4}.$$

### 3.2.2 Quelques résultats numériques obtenus

Dans cette section, on présente quelques résultats obtenus pour le cas d'écoulement de l'eau peu profonde en présence d'un traceur biologique actif. Le pas de temps est déterminé par la condition  $CFL$ . Un bon choix de cette dernière me garantie la stabilité du schéma numérique de la méthode de limitation de flux proposée et de vérifier numériquement sa capacité de résoudre les problèmes avec la discontinuité et un fond supposé plat.

On rappelle le nombre de Courant  $CFL$  défini selon la formule suivante :

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max_{k=1,\dots,6}(|\lambda_k^n|)},$$

où  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) sont les valeurs propres du système de transport des organismes biologiques NPZD.

Initialement, le système est au repos avec une hauteur de l'eau  $h = 0.5$ . La viscosité des particules est  $\mathcal{D} = 3 m^2 s^{-1}$ . Ici, le problème a été étudié pour le cas 1D en utilisant le schéma de Lax-Freidrichs.

Noter que le seul état d'équilibre au repos pour ce problème est obtenu pour  $N$ ,  $P$ ,  $Z$ ,  $D$  et la vitesse sont des constantes ce qui est normal puisqu'à l'absence d'écoulement, les organismes NPZD vont se déposer.

Dans FIGURE 3.8, on représente la surface libre de l'eau. Les résultats obtenus sont simulés jusqu'à  $t = 10$  s pour un maillage de 100 points. On voit que la surface libre reste constante durant la simulation.

Un autre cas test où on a considéré les conditions initiales suivantes  $No = 0.2$ ,  $Po = 0.02$ ,  $Do = 0.06$ ,  $Zo = 0.05$  et avec une vitesse initiale tangentielle une gaussienne :

$$u(0, t) = \frac{1}{2} | \sin(\frac{\pi t}{5}) | \quad \forall t \in [0, 10].$$

Dans FIGURE 3.9, on a représenté la hauteur de l'eau  $h$ , le moment  $hu$ , la vitesse  $u$  dans la direction  $x$  et les concentrations des organismes NPZD à  $t = 10$  s, en utilisant un maillage de 400 points. En observant les résultats, on voit qu'à l'instant initial, des ondes vers la droite. Par conservation de la masse, ce déplacement du fluide génère une vague en surface pour un écoulement sur le fond plat.

Enfin dans FIGURE 3.10, on donne la configuration de l'écoulement global et de l'effet de la variation de densité avec la discontinuité dans les concentrations des organismes NPZD :

$$P_0 = \begin{cases} P_g = 0.02 & \text{si } x \leq 50 \\ P_d = 0.034 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.26)$$

$$N_0 = \begin{cases} N_g = 0.2 & \text{si } x \leq 50 \\ N_d = 0.33 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$Z_0 = \begin{cases} Z_g = 0.05 & \text{si } x \leq 50 \\ Z_d = 0.072 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$D_0 = \begin{cases} D_g = 0.04 & \text{si } x \leq 50 \\ D_d = 0.06 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Les résultats obtenus démontrent la capacité du schéma de Lax-Friedrichs à capturer les fronts se déplaçant dans des géométries complexes sans générer des oscillations parasites. En effet, les résultats de FIGURE 3.10 montrent que le système ne présente pas des oscillations parasites au niveau de la discontinuité des concentrations des organismes NPZD.

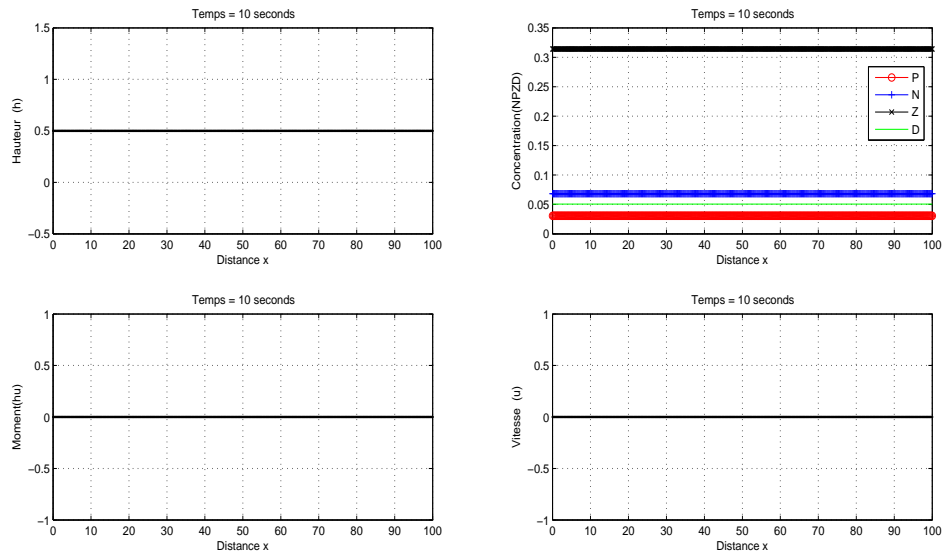


FIGURE 3.8 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour la vitesse et les concentrations des organismes NPZD sont canstantes à l’aide du schéma de Lax Freidrich avec  $\Delta t = 10$ ,  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 400$ .

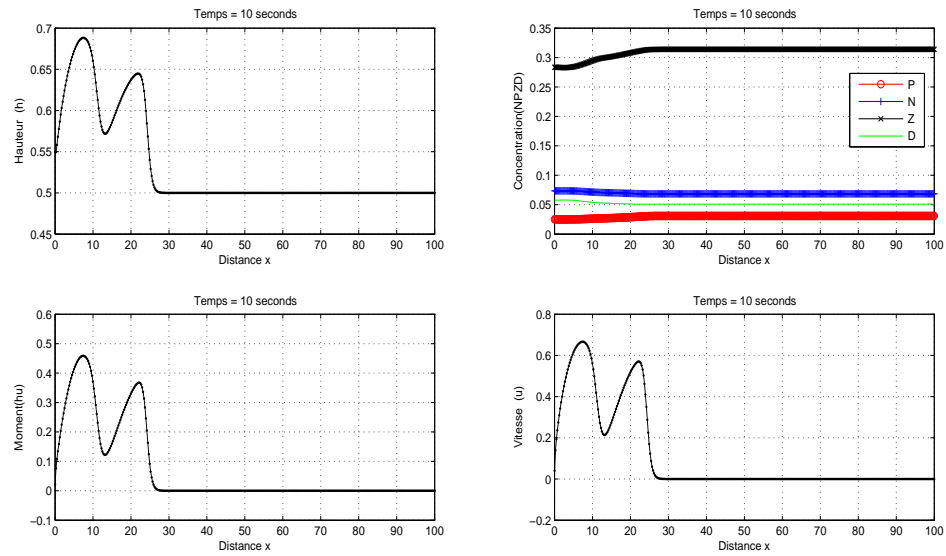


FIGURE 3.9 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour la vitesse gaussienne à l’aide du schéma Lax Freidrich avec  $\Delta t = 10$ ,  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 400$ .

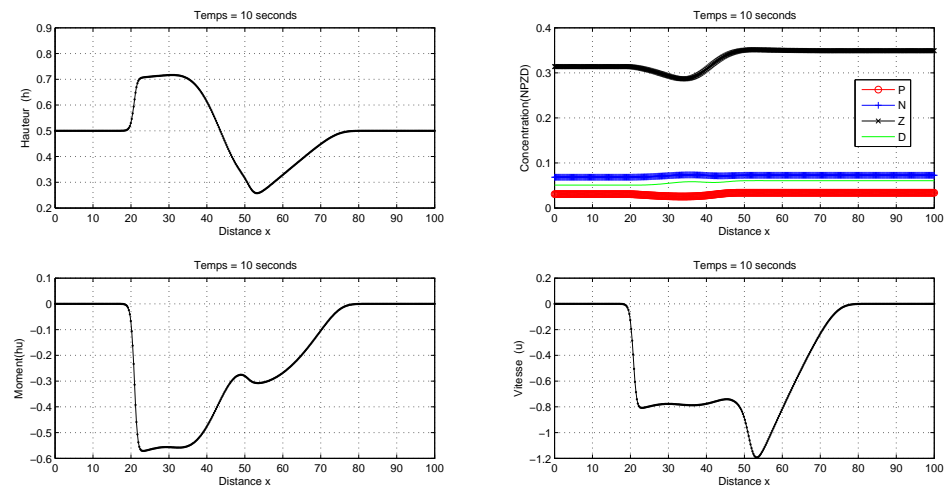


FIGURE 3.10 – Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour les concentrations des organismes NPZD sont variables à l’aide du schéma de Lax Freidrich avec  $\Delta t = 10$ ,  $\rho_c = 1600$ ,  $\rho_w = 1000$  et  $n = 400$ .

Dans un dernier temps, on a testé la capacité de la méthode de limitation de flux pour la résolution du problème des écoulements en eaux peu profondes avec la prise en compte des organismes biologiques (NPZD). On a considéré les conditions initiales suivantes :

$$P_0 = \begin{cases} P_g = 0.02 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ P_d = 0.034 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$N_0 = \begin{cases} N_g = 0.2 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ N_d = 0.033 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$Z_0 = \begin{cases} Z_g = 0.05 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ Z_d = 0.072 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$D_0 = \begin{cases} D_g = 0.06 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ D_d = 0.06 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$h_0 = \begin{cases} h_g = 0.05 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{si } x \leq 50 \\ h_d = 0.02 \log\left(\frac{2.2-x}{100}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.34)$$

tel que la vitesse  $u(x, 0) = 0 \forall x \in [0, 100]$ , et en utilisant les paramètres listés dans TABLE 3.1.

Quantité	Valeur de référence
$\rho_w$	1000
$\rho_c$	1600
$g$	9.8
$\mathcal{D}$	3

TABLE 3.1 – Paramètres de référence utilisés pour les simulations.

ainsi qu'un maillage de 200 points. Les résultats numériques affichés à l'instant  $t = 5$ . Ici, on affiche la hauteur de l'eau  $h$ , le moment  $hu$ , la vitesse  $u$  et la concentration des organismes NPZD sont donnés dans FIGURE 3.11- FIGURE

3.17. Dans ces figures on a comparé d'une part les résultats obtenus en utilisant le schéma Lax-Friedrichs et la méthode de Lax-Wendroff qui a réussi à éliminer la diffusion numérique, mais elle donne lieu à des oscillations non physiques dans la zone de discontinuité et d'autre part les résultats donnés avec des limiteurs de Van Leer, Minmod, Free et Superbee. Etant donné que le schéma de Lax-Friedrichs est d'ordre 1 on voit qu'il est diffusif, On a pensé à utiliser Lax-Wendroff qui est d'ordre deux donc il réduit cette diffusion par contre on se trouve avec des oscillations non physiques au niveau des discontinuités qui vont être réduits en utilisant les limiteurs cité ci-dessus. On voit que le limiteur Superbee donne des meilleurs résultats qui s'approche de ceux de Lax-Wendroff mais avec beaucoup moins de diffusif et sans oscillation parasite, suivie par le limiteur Van Leer et limiteur Minmod. Par ailleurs, On constate la très bonne coïncidence entre la solution numérique avec la méthode de Lax-Friedrichs et le limiteur Free.

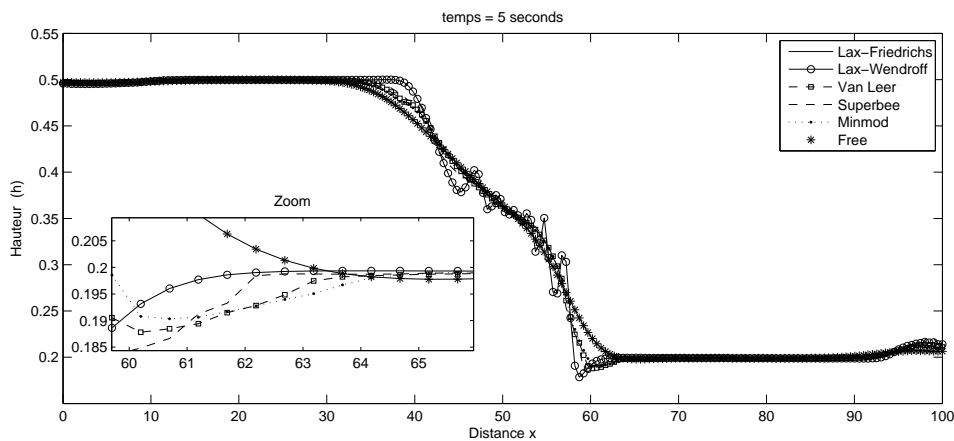


FIGURE 3.11 – Comparaison des différents schémas pour la hauteur de l'eau à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .

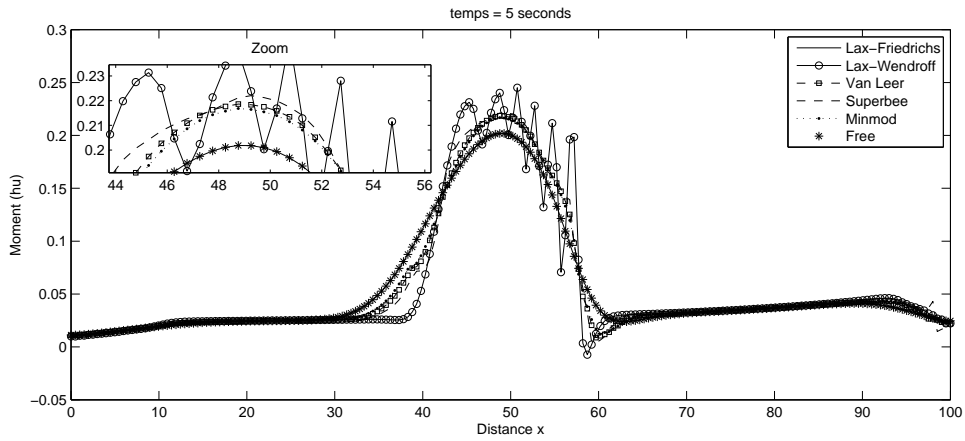


FIGURE 3.12 – Comparaison des différents schémas pour le moment à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .

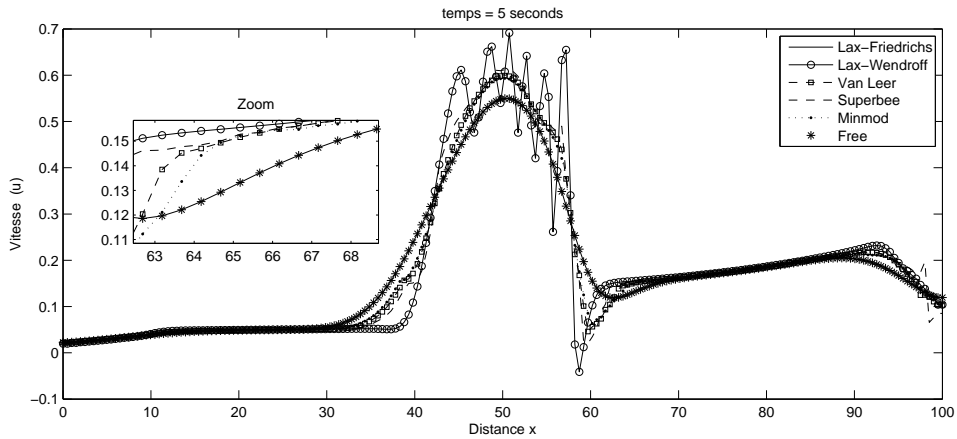


FIGURE 3.13 – Comparaison des différents schémas pour la vitesse de l'eau à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .

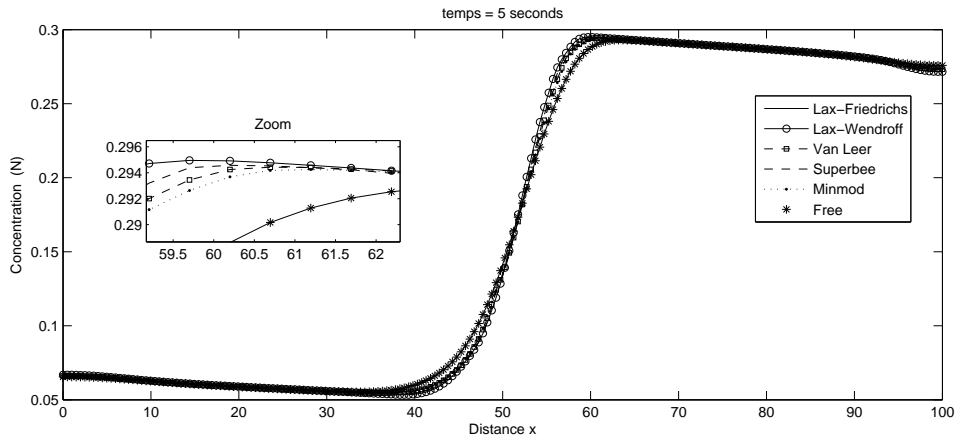


FIGURE 3.14 – Comparaison des différents schémas pour la concentration de Nutriments à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .

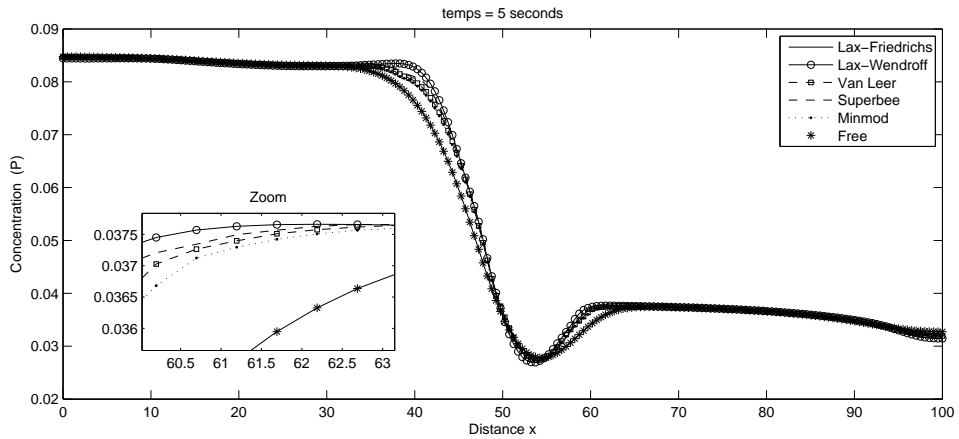


FIGURE 3.15 – Comparaison des différents schémas pour la concentration de Phytoplancton à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .



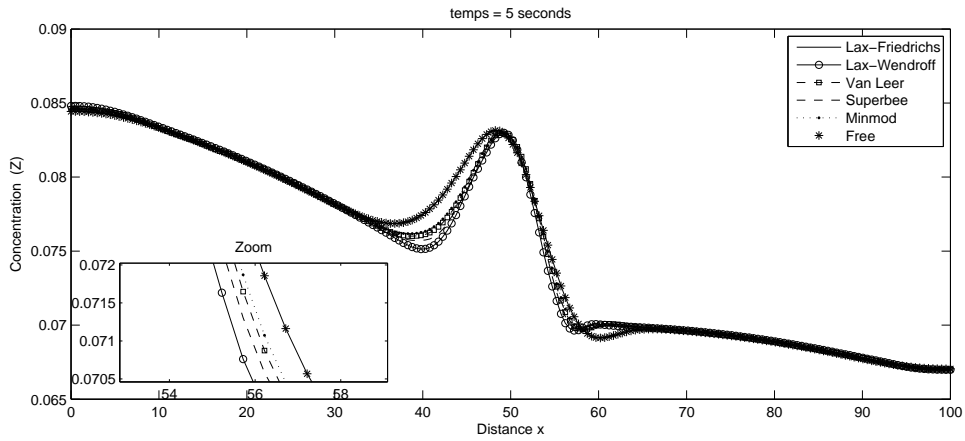


FIGURE 3.16 – Comparaison des différents schémas pour la concentration de Zooplancton à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .

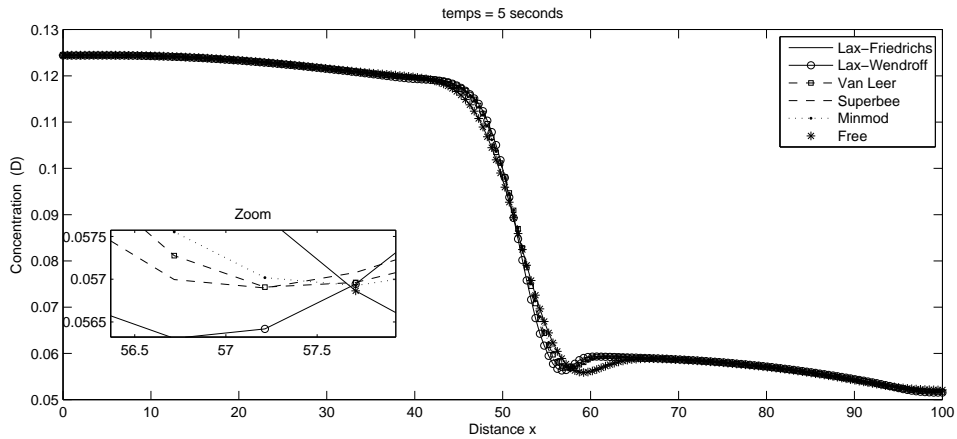


FIGURE 3.17 – Comparaison des différents schémas pour la concentration de Détritius à  $n = 200$ ,  $\rho_c = 1600$  et  $\rho_w = 1000$ .



# Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail on s'est intéressé à l'étude des écoulements d'eaux peu profondes avec la particularité de présence d'un traceur ou de composants biologiques.

Au premier abord on s'est orienté vers la résolution numérique du modèle de Saint-Venant couplé à une équation de transport d'un traceur inerte et après on a pris en considération le couplage avec une dynamique biologique du NPZD. On a présenté quelques schémas numériques qui s'apparentent à la méthode des volumes finis et qui nous ont permis de résoudre le modèle mathématique présenté plus haut.

Ainsi on a tout d'abord pris la hauteur de l'eau  $h$  et la vitesse  $u$  comme étant des constantes ce qui a permis de transformer les équations initiales en une équation de transport-diffusion du modèle NPZD plus simple à étudier.

Ensuite, on a résolu les équations de Saint-Venant couplées à l'évolution d'un traceur de concentration  $c$  dans un premier temps, puis couplées à une dynamique biologique (NPZD).

Dans cette étude on a exploré les schémas du premier ordre, celui de Lax-Friedrichs,

le schéma du deuxième ordre sans limiteur tels que le schéma de Lax-Wendroff et enfin les schémas deuxième ordre avec les limiteurs de flux, à savoir Minmode, Superbee, Free et Van Leer.

A partir de l'analyse des tests numériques pour les écoulements en eaux peu profondes, on constate que les schémas à limiteurs de flux sont les plus avantageux quant à la précision et la stabilité.

Les travaux effectués sur le modèle 1D du schéma FVC ne sont qu'un premier pas dans notre étude de la dynamique biologique en eaux peu profondes. Dans les futurs travaux, nous allons effectuer tout d'abord l'extension en 2D en prenant en compte le déphasage temps entre l'évolution de la dynamique biologique et l'écoulement d'eau (peut être penser à utiliser des schémas implicites). Notre deuxième objectif serait de développer de nouvelles méthodes capables de modéliser des applications plus réalistes des écoulements multicouches.

# Table des figures

2.1	Courbes obtenues pour les deux schémas Euler et Rung-Kutta avec $\Delta t = 0.125$ ainsi que la solution exacte de l'équation (2.7). . . . .	17
2.2	Courbes obtenues pour les deux schémas Euler et Rung-Kutta avec $CFL = 0.125$ ainsi que la solution exacte de l'équation (2.10). . .	20
2.3	La solution exacte et la solution approchée de l'équation (2.11) par méthode Euler (avec ou sans choc) avec $\Delta x = 0.1$ et nombre de point $n = 101$ . . . . .	24
2.4	La solution exacte et la solution approchée de l'éq(2.11) par le schéma de Lax-Wenddroff (avec ou sans choc) avec $\Delta x = 0.1$ et le nombre de point $n = 101$ . . . . .	26
2.5	Solution exacte et solution approchée de l'équation (2.11) avec le schéma de Lax-Wendroff limité par Superbee sans choc telque $CFL = 5.e - 1$ ,nombre du points $n = 799$ . . . . .	31
2.6	Solution exacte et solution approchée de l'équation (2.23) avec les schémas d'ordre 1 et d'ordre 2 tel que $CFL = 5.e - 1$ , nombre du points $n = 99$ . . . . .	32
2.7	Schéma conceptuel du modèle couplé NPZD . . . . .	34

2.8	Solutions approchées de l'équation (2.23) (NPZD) pour le schéma de Lax-Wendroff limité par Koren avec $CFL = 0.5$ et nombre de points $n = 199$ . . . . .	37
2.9	Solutions approchées (NPZD) de l'équation advection-diffusion (2.32) pour le schéma de Lax-Wendroff limité par Koren avec $CFL = 0.5$ et nombre de points $n = 199$ . . . . .	39
3.1	Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Freidrichs avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 200$ .	46
3.2	Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Freidrichs avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 400$ .	47
3.3	Courbes obtenues de la solution des équations (3.5) – (3.7) pour le schéma de Lax-Freidrichs avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 1000$ .	47
3.4	Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la hauteur de l'eau avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 200$ . . . . .	48
3.5	Comparaison des différentes fonctions de limitation pour le moment avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 200$ . . . . .	49
3.6	Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la vitesse de l'eau avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 200$ . . . . .	49
3.7	Comparaison des différentes fonctions de limitation pour la concentration du traceur avec $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 200$ . . . . .	50
3.8	Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour la vitesse et les concentrations des organismes NPZD sont constantes à l'aide du schéma de Lax Freidrich avec $\Delta t = 10$ , $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 400$ . . . . .	59

3.9	Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour la vitesse gaussienne à l’aide du schéma Lax Freidrich avec $\Delta t = 10$ , $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 400$ . . . . .	60
3.10	Courbes obtenues de la solution des équations (3.14) – (3.19) pour les concentrations des organismes NPZD sont variables à l’aide du schéma de Lax Freidrich avec $\Delta t = 10$ , $\rho_c = 1600$ , $\rho_w = 1000$ et $n = 400$ . . . . .	60
3.11	Comparaison des différents schémas pour la hauteur de l’eau à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	62
3.12	Comparaison des différents schémas pour le moment à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	63
3.13	Comparaison des différents schémas pour la vitesse de l’eau à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	63
3.14	Comparaison des différents schémas pour la concentration de Nutriments à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	64
3.15	Comparaison des différents schémas pour la concentration de Phytoplancton à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	64
3.16	Comparaison des différents schémas pour la concentration de Zooplancton à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	65
3.17	Comparaison des différents schémas pour la concentration de Détritrus à $n = 200$ , $\rho_c = 1600$ et $\rho_w = 1000$ . . . . .	65





# Liste des tableaux

2.1	Résolution de l'équation (2.5) par la méthode d'Euler : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	17
2.2	Résolution de l'équation (2.5) par la méthode de Runge Kutta : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	17
2.3	Résolution de l'équation (2.10) par la méthode d'Euler : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	19
2.4	Résolution de l'équation (2.10) par la méthode Runge Kutta : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	20
2.5	Résolution de l'équation de transport avec choc pour la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	24
2.6	Résolution de l'équation de transport sans choc pour la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	25
2.7	Résolution de l'équation de transport avec choc pour le schéma de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	26
2.8	Résolution de l'équation de transport sans choc pour le schéma de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	27

---

2.9	Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur MinMod : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	30
2.10	Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur Koren : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	30
2.11	Résolution de l'équation de transport sans choc par la méthode de Lax-Wendroff avec le limiteur Superbee : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	31
2.12	Résolution de l'équation (2.23) par la méthode Euler : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	33
2.13	Résolution de l'équation (2.23) par la méthode de Lax-Wendroff : Erreurs et ordres de convergence. . . . .	33
2.14	Valeurs des paramètres . . . . .	35
3.1	Paramètres de référence utilisés pour les simulations. . . . .	61

# Bibliographie

- [1] F. ALCRUDO et F. BENKHALDOUN : Exact solutions to the riemann problem of the shallow water equations with a bottom step. *Comput. Fluids*, 30:643–671, 2001.
- [2] F. BENKALDOUN : Analysis and validation of a new finite volume scheme fr non homogeneous systems. *Finite Volumes for Complex applications : Problems Perspectives, hermes Science Publications, R. Herbin, D. kroner Eds*, pages 269–276, 2002.
- [3] A. BERMUDEZ et M. E. VAZQUEZ : Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Comput. Fluids*, 23(8):1049–1071, 1994.
- [4] S. J. BILLETT et E. F. TORO : On waf-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys*, 130:1–24, 1997.
- [5] Z. CAO et P. CARLING : Mathematical modelling of alluvial rivers : reality and myth. part i : General overview. *Water Maritime Engineering*, 154:207–220, 2002.
- [6] S. CASTELLTORT et G. SIMPSON : Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Comput. Geosci.*, 32:1600–1614, 2006.

- 
- [7] A. H. D. Cheng S. Ouazar D. SOREK, J. Bear et I. HERRERA : Seawater intrusion in coastal aquifers concepts methods and practices. *Kluwer Academic Publishers*, 1999.
- [8] I. ELMAHI : *Schéma volumes finis pour la simulation numérique de problèmes à fronts raides en maillage non structurés adaptatifs*. Thèse de doctorat, Université de Rouen, 1999.
- [9] P. J. S. FRANKS : Npz models of plankton dynamics : their construction, coupling to physics and application. *journal of oceanography*, 58:379–387, 2002.
- [10] P. GLAISTER : Approximate riemann solutions of the two-dimensional shallow water equations. *J. Engrg. Math*, 24(1):45–53, 1990.
- [11] S. K. GODUNOV : A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. sb.*, 47(89):271–306, 1959.
- [12] J. M. GREENBERG et A. Y. LEROUX : A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Num. Anal*, 33(1):1–16, 1996.
- [13] A. HARTEN et G. ZWAS : Self adjusting hybrid schemes for shock computations. *J. Comput. Phys.*, 9:568, 1972.
- [14] P. LAX et B. WENDROFF : Systems of conservation laws. *Com. on Pure and Appl. Math.*, 13:217–237, 1960.
- [15] P. D. LAX : Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *SIAM, Philadelphia*, 27, 1973.

- 
- [16] B. V. LEER : Towards the ultimate conservation difference scheme, a second order sequel to godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 23:101–136, 1979.
- [17] S. OSHER et F. SOLOMON : Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Math. Comput.*, 38(158):39–374, 1983.
- [18] A. Harten P. D. LAX et B. V. LEER : On upstream differencing and godunovtype scheme for hyperbolic conservation laws. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 25(1):35–61, 1980.
- [19] A. PROVENZALE et L. Z. SANSON : The effects of abrupt topography on plankton dynamics. *Theoretical population biology*, 76:258–267, 2009.
- [20] J. L. RANDALL : *Finite volume methods for hyeperbolic problems*. 2002.
- [21] P. L. ROE : Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *jcp*, 43:357–372, 1981.
- [22] P. L. ROE : Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. *Lecture Notes in Math.*, 1270:41–51, 1987.
- [23] S. SARI : *Modélisation mathématique de systèmes multichouches avec transport de sédiments pour les problèmes à surface libre*. Thèse de doctorat, Université Paris13, 2013.
- [24] C. W. SHU et S. OSHER : Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *I. Journal of Computational Physics*, 77:439–471, 1988.
- [25] G. SIMPSON et S. CASTELLTORT : Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Comput. Geosci*, 32:1600–1614, 2006.

- [26] S. SLAH : *Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes*. Thèse de doctorat, Université Paris13, 2005.
- [27] J. J. STOKER : *water waves :the mathematical theory with applications*. *Pure and Applied Mathematics*, IV, 1957.
- [28] N. N. YANENKO : *Méthode à pas fractionnaires pour la résolution numérique des problèmes de la physique mathématique*. *en français chez Dinod*, 1968.