



Université de Carthage
École Polytechnique de Tunisie
Laboratoire d'Ingénierie Mathématique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Mastère d'Ingénierie Mathématique de :
L'École Polytechnique de Tunisie

Présenté par
Tarek GHOUDI

Analyse et étude d'un modèle de couplage entre le modèle de Saint-Venant et un écoulement en milieu poreux

Encadré par: **M. Fayssal BENKHALDOUN**
M. Slah SAHMIM

Soutenu le 11 Janvier 2014
Devant la Commission d'Examen

JURY

President : M. **Ali ABDENNADHER**, Maître de Conférence
Encadreur : M. **Fayssal BENKHALDOUN**, Professeur des Universités
Encadreur : M. **Slah SAHMIM**, Maître Assistant
Examineur : M. **Habib ZRIBI**, Maître de Conférence
Invitée : Mlle. **Sondes KHABTHANI**, Maître Assistante

Dédicace

Je dédie ce travail:

À celui qui m'a tout inculqué et indiqué la bonne voie en me rappelant sans cesse que la patience, la volonté et le travail ont toujours fait les grands hommes.

À mon père

À celle qui m'a donné le goût du travail qui ne ménage aucun effort pour ma réussite et a su attendre avec patience les fruits de sa bonne éducation.

À ma mère

À ceux et celles qui, de leur amour, leur respect et leur dévouement me bercent le coeur.

À mes frères et soeurs

« Derrière les équations se cachent les audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique particulière. Ce caractère artistique apparaît même si l'on n'entre pas dans le détail mathématique. »

H. Banesh, HISTOIRE D'UNE GRANDE IDÉE, LA RELATIVITÉ.

« ... Si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité mathématique plus qu'une organisation formelle de schèmes et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité. Et l'on s'aperçoit, à méditer le travail mathématicien, qu'il provient toujours d'une extension d'une connaissance prise sur le réel et que, dans les mathématiques mêmes, la réalité se manifeste en sa fonction essentielle : faire penser. »

Gaston Bachelard, LE NOUVEL ESPRIT SCIENTIFIQUE.

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mes deux directeurs de Mémoire Mr le professeur **Fayssal Benkhaldoun** et Mr **Slah Sahmim** qui m'ont proposé ce sujet, leur disponibilité, leur patience et leurs encouragements, et pour la confiance qu'ils m'ont accordée et l'aide inestimable qui m'a permis de développer mes capacités scientifiques et de réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer encore ma plus sincère reconnaissance envers mon professeur **Fayssal Benkhaldoun** qui m'a donné l'honneur d'être son invité m'a fait profiter de son expérience et de faire cette recherche au sein du **Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications LAGA** à **L'Université Paris 13**, son aide et ses conseils se sont toujours révélés très enrichissants et décisifs.

Ce travail a pu se faire grâce au programme de recherche **Inria MedLagoon**. Je remercie à cette occasion chaleureusement **M. Herve Guillard** directeur de projet, qui m'a permis de faire des stages décisifs pour ce mémoire.

Je présente mes remerciements les plus distingués à **Ali Abdennadher** pour m'a voir honoré de présider le jury. Je souhaite aussi remercier **Habib Zribi** d'avoir rapporté ce mémoire et, par leurs commentaires, de m'avoir aidé à l'améliorer.

Un grand merci également à **Sondes Khabthani** pour ses conseils, orientations ses encouragements, son enthousiasme et sa disponibilité. Lors de mon travail de mémoire j'ai eu la chance de rencontrer Mr **Pascal Omnes** de l'université de Paris 13 et de partager ses connaissances. Un homme d'une grande écoute et d'une grande disponibilité. Merci **Pascal**.

Il me tient à coeur de remercier les membres de ma famille, mes parents, frères et soeurs pour leur grand soutien moral, leurs encouragements, leur patience et leur confiance. Un grand merci à mon père et à ma mère pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Enfin, j'aimerais remercier du fond du coeur mon fère **Ridha**, qui me présente le père, le frère et mon meilleur exemple, et sa femme **Wassila**, qui m'ont soutenu et encouragé durant toutes ces longues années. Merci pour votre sagesse, vos attentions répétées, votre patience, votre confiance et toutes vos valeurs. Je vous dédicace ce travail et vous remercie pour m'avoir permis d'aller aussi loin dans mes études

Table des matières

Remerciements	5
Résumé	11
Introduction générale	13
Chapitre 1 Présentation du Problème	21
Chapitre 2 Lois de Conservation Scalaire	
2.1 Equation de Transport Linéaire Scalaire	24
2.2 Couplage Simple Entre Les Équations de Saint-Venant et Les Équations de Darcy	27
2.2.1 Forme Générale	27
2.2.2 Quelques exemples simples	27
2.2.3 Anaylse de la Méthode Volumes Finis	30
2.3 Estimation d'Erreur a posteriori	35
Chapitre 3 Démonstrations de Lemmes Admis	
3.1 Démonstartions de Lemmes Admis	41
Chapitre 4 Tests Numériques	
Chapitre 5 Méthode de volumes finis centrée sur les noeuds(vertex centered)	
5.1 Présentation du problème et discrétisation	57
5.2 Implémentation de la résolution du laplacien	60
5.3 Calcul du gradient	62
5.4 Implémentation du calcul du gradient	62
5.5 Résultats Numériques	63
Conclusion et Perspectives	69

Annexes	
Annexe A Flux de Roe et Méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de systèmes linéaires	
A.0.1 Méthode de Gauss-Seidel	72
Annexe B Erreur de troncature	
Annexe C Équivalence d'extremum dans L^2	
Annexe D Dérivé d'une norme dans L^2	
Annexe E Équivalence d'extremum dans le cas monodimensionnel	
Annexe F Résolution de l'équation $v + \lambda v'' = 0$	
Annexe G Équivalence du problème d'optimisation dans le cas bidimensionnel	
Bibliographie	87
Bibliographie	89

Table des figures

1	Milieux peu profonds	15
2	Milieu poreux	17
1.1	écoulements terrains et souterrains	22
2.1	Maillage 1D et les notations associés	25
2.2	courbes de la solution u, respectivement choc et détente avec le schéma décentré, $cfl=0.75$	26
3.1	La fonction w_h associée aux valeurs $(w_i)_{i \in [0, N+1]}$	42
3.2	La fonction w_h^* associée aux valeurs $(w_i)_{i \in [1, N]}$	43
4.1	courbes de l'efficacité pour $f(x) = \exp(x)$	51
4.2	courbe de l'erreur pour $f(x) = \exp(x)$	51
4.3	courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.04$ et $f(x) = \exp(x)$	52
4.4	courbes de l'efficacité pour $f(x) = (1 + x) \exp(x)$	52
4.5	courbes de l'erreur pour $f(x) = (1 + x) \exp(x)$	53
4.6	courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.06$ et $f(x) = (1 + x) \exp(x)$	53
4.7	courbes de l'efficacité pour $f(x) = \cos(x)$	54
4.8	courbes de l'erreur pour $f(x) = \cos(x)$	54
4.9	courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.02$ et $f(x) = \cos(x)$	55
5.1	Maillages primal et dual	58
5.2	courbe de la solution numérique, 3956 itérations	64
5.3	courbe du résidu, 3956 itérations	64
5.4	courbe de la formule exacte de f, 3956 itérations	65
5.5	courbe de la moyenne de f sur cellule d'intégration, 3956 itérations	65
5.6	courbe de la solution exacte, 3956 itérations	66
5.7	courbe du saut de gradient, 3956 itérations	66
5.8	courbe d'Erreur= $u-u_{exacte}$, 3956 itérations	67

Résumé

La loi de Darcy est notamment utile pour caractériser les écoulements souterrains de l'eau, qu'on l'utilise fréquemment dans l'étude des écoulements fluides en milieu poreux, qui revêt une grande importance dès qu'il s'agit de résoudre des problèmes concrets, liés à plusieurs domaines scientifiques et industriels, tels que l'hydrogéologie, l'hydrologie, l'industrie pétrolière ect... L'étude expérimentale des écoulements dans le sous-sol étant très difficile et coûteuse ; la puissance sans cesse croissante des ordinateurs aidants, on a de plus en plus recours à la modélisation et la simulation. Dans ce mémoire nous étudierons le couplage de l'équation de Darcy avec les équations de Saint-Venant qui décrivent un écoulement à surface libre en eau peu profonde par la méthode des volumes finis. La précision et la robustesse de notre schéma décentré utilisé pour la discrétisation des équations couplées est évaluée sur plusieurs cas tests. Par la suite nous nous sommes intéressées à l'étude de l'estimation d'erreur a posteriori, en particulier pour l'équation de Laplace monodimensionnelle et sa discrétisation par la méthode des volumes finis. On présente également des essais numériques et l'algorithme utilisé pour cette étude.

Mots clés

Lois de conservation ; équations de Saint-Venant ; écoulement en milieu poreux ; Loi de Darcy ; Méthode de volumes finis ; Adaptation de maillages ; Estimation d'Erreur a Posteriori ; Couplage entre équations elliptiques et hyperboliques.

Introduction générale

Ce mémoire est consacré à la simulation monodimensionnelle d'un modèle de couplage entre les équations de Saint-Venant qui modélisent un écoulement à surface libre en eau peu profonde et les équations de Darcy modélisant un écoulement d'eau en milieux poreux. L'intérêt d'aborder cette thématique est double: il y a d'une part les difficultés introduites par les systèmes non homogènes, y compris dans le cas monodimensionnel, et d'autre part les difficultés de l'extension des schémas numériques au cas multidimensionnel, précisément pour de tels systèmes. Nous nous sommes intéressées à l'étude des équations elliptiques qui sont rencontrées dans plusieurs modèles physiques (écoulement des fluides, l'équilibre électrostatique...). Leur analyse théorique est généralement effectuée en utilisant des formulations variationnelles, qui sont des outils puissants. D'autre part, les équations hyperboliques ont été discrétisées efficacement par des techniques de volumes finis. Ensuite, la question qui se pose quand on décide de discrétiser des modèles qui couplent les équations hyperboliques et elliptiques est de savoir comment adapter les techniques de volumes finis pour équations elliptiques. Comme dans le cas multidimensionnel, où la diffusion anisotrope et / ou des maillages déformés vont générer des difficultés numériques, nous allons procéder à l'analyse numérique de méthodes de volumes finis essentiellement pour l'équation de Laplace monodimensionnel. De nombreux phénomènes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Certaines de ces équations peuvent être résolues analytiquement et leurs solutions exactes sont connues. Toutefois, pour un nombre important d'équations, la solution exacte est inconnue. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour pouvoir approcher les solutions de ces équations. Ces méthodes fournissent des solutions approchées qui sont le plus souvent des fonctions appartenant à un espace fonctionnel de dimension finie. La discrétisation de ces équations par ces méthodes numériques donne lieu en général à des systèmes de grandes dimensions. La résolution des grands systèmes étant coûteuse en termes de temps de calcul et de ressources informatiques, deux questions importantes se posent. Tout d'abord, est-ce que la résolution de ce système fournit une solution approchée de bonne qualité? Dans le cas des solutions numériques des équations aux dérivées partielles, cette question est reliée au problème d'estimer et de contrôler l'erreur due à la discrétisation entre la solution exacte et la solution approchée. En d'autres termes, il s'agit de

déterminer la précision de la méthode numérique.

La deuxième question qui se pose est la suivante: Est-ce que les ressources informatiques disponibles sont bien utilisées?. En effet, dans plusieurs cas, la solution d'un problème physique présente un comportement local dû par exemple à la discontinuité des coefficients, à des sources localisées, à des conditions de bord... Dans ce cas, la précision globale de la méthode numérique peut se détériorer. Une solution évidente pour remédier à ce problème est de raffiner les régions du maillage où ce comportement local se présente. Les réponses à ces questions peuvent être décisives dans la construction des ponts et barrages, la fabrication des voitures et avions, les prévisions de la météo, l'exploitation du pétrole et du gaz naturel, la dépollution des sols et océans, les applications biomédicales, les simulations de la dynamique des populations, les prévisions économiques et financières etc... En effet, la décision est souvent prise sur la base du résultat numérique. Le but des estimations d'erreur a posteriori est de donner des bornes sur l'erreur entre l'approximation numérique et la solution exacte qui peuvent être calculées en pratique, une fois que la solution approchée est connue. Cette analyse peut alors fournir des critères d'arrêt qui garantissent le contrôle global de l'erreur. Donc le but d'un calcul n'est pas de produire une solution avec l'erreur la plus petite possible, mais de produire, de façon fiable, robuste et abordable, une solution avec une précision spécifiée par l'utilisateur.

On rappelle quelques outils essentiels :

Systemes de Lois de Conservations

Ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles dépendant du temps, usuellement non linéaires. En dimension d d'espace, ces équations prennent la forme générale suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial F_j(W(x, t))}{\partial x_j} = 0 \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, t > 0 \\ W(x, 0) = W_0(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

Où $W : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ est un vecteur à valeurs dans \mathbb{R}^p , Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^p .

Les fonctions F_j ($1 \leq j \leq d$) dites fonctions flux, "assez régulières".

Les équations de Saint-Venant

Elles régissent un écoulement à surface libre en eau peu profonde, soumis à la gravité. Elles sont obtenues en intégrant les équations de Navier-stokes (tridimensionnelles) suivant la direction verticale (direction de la force de gravité), en supposant différentes hypothèses fondamentales dont celle de la pression hydrostatique. Le modèle de Saint-Venant est appelé en anglais shallow water equations. Les applications les plus courantes du modèle de Saint-Venant concernent la

rupture de barrage, les crues, l'hydraulique des fleuves, les systèmes d'irrigation, les écoulements marins...

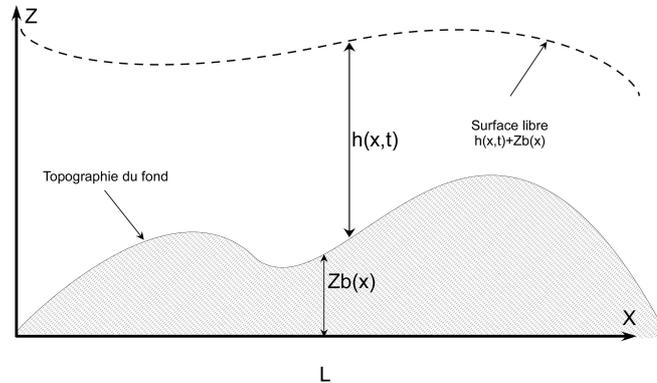


FIGURE 1 – Milieux peu profonds

Dans le cas d'un canal rectangulaire le système de Saint-Venant monodimensionnel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où h est la hauteur d'eau dans le canal, u la vitesse de l'écoulement, g la constante de gravité. Pour les équations de Saint-Venant avec termes sources, une classe de schémas a été développée et mise en œuvre avec succès pendant la dernière décennie. Il s'agit de la classe des schémas d'équilibre, basés sur le respect d'une propriété de stationnarité.

Méthode des Volumes Finis(FVM)

C'est une technique efficace utilisée pour calculer des solutions approchées de divers problèmes rencontrés par exemple en mécanique des fluides et dans les transferts de chaleur et de masse... La simplicité, la robustesse, et le faible coût pour la discrétisation des lois de conservation sont quelques-unes des caractéristiques qui sont à la base de la popularité de ce procédé. La méthode des volumes finis est similaire à celle de la méthode des éléments finis, elle s'en différencie par une caractéristique essentielle: la conservativité locale des flux numériques.

Le principe de la méthode en 1D consiste à diviser le domaine spatiale en volumes de contrôles $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ centré en $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$ avec un pas d'espace $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$.

On utilise la notation U_i^n pour noter la valeur de U sur la cellule $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$. Aussi on divise l'intervalle du temps en sous intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ avec $t_n = n\Delta t$ et Δt est le pas de temps.

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}})$$

Où $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est une approximation de la moyenne en temps de flux sur $x = x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\phi_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt$$

On donne quelques schémas volumes finis:

Le schéma de Lax-Friedrichs modifié

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(U_{i+1}^n) + f(U_i^n)) - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (U_{i+1}^n - U_i^n)$$

Le schéma de Lax-Friedrichs modifié est une première méthode d'ordre 1 en précision qui induit une grande diffusion numérique, et donc donne une mauvaise précision.

Le Schéma de ROE en 1D

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(U_{i+1}^n) + f(U_i^n)) - \frac{1}{2} |a_{i+\frac{1}{2}}^n| (U_{i+1}^n - U_i^n)$$

et

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} f'(U_i^n) & \text{si } U_{i+1}^n = U_i^n \\ \frac{f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)}{U_{i+1}^n - U_i^n} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

C'est aussi une méthode de premier ordre.

Ces méthodes peuvent être améliorées par l'introduction de termes de correction dans le schéma de volumes finis.

Le schéma de Lax-Wendroff

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(U_{i+1}^n) + f(U_i^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} |a_{i+\frac{1}{2}}^n| (f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n))$$

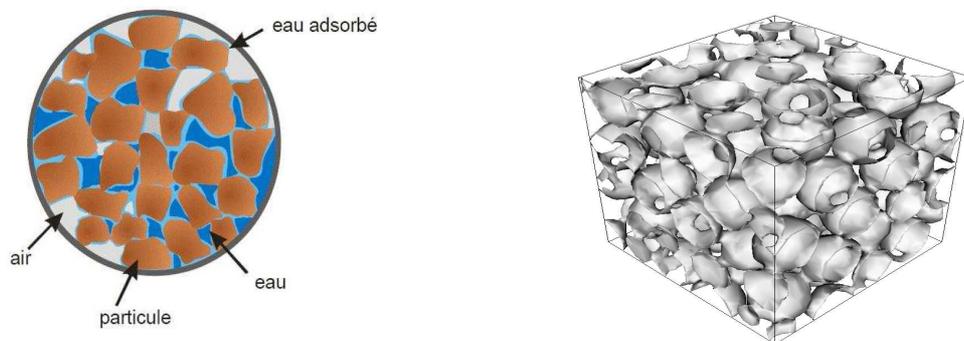
Et

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = f' \left(\frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2} \right)$$

Il s'agit d'une méthode de seconde ordre qui donne des résultats beaucoup mieux que les premières méthodes, mais elle donne également lieu à une solution oscillatoire.

Loi de Darcy

Dans le catalogue des milieux divisés, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe. On trouve de nombreux matériaux



Réprésentation d'un milieu poreux

Réprésentation d'un milieu poreux en 2D

FIGURE 2 – Milieu poreux

naturels dans cette catégorie: les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple). D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères:

- (1) le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide.
- (2) le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide). Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux: la porosité, la fraction de vide et la perméabilité qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est-à-dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau: les pores.

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Henry Darcy né en 1803 à Dijon se consacra à des recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau à travers des massifs de sable, dans

les conduits et dans les canaux avec surface libre. Il publia son célèbre ouvrage Les fontaines publiques de Dijon [Dar56] dans lequel est formulée pour la première fois la loi qui porte son nom. Cette loi constitue un élément fondamental dans la modélisation mathématique de l'écoulement des fluides dans un milieu poreux ; elle est aujourd'hui largement utilisée dans de nombreux domaines: hydrologie, domaine pétrolière...La loi de Darcy a été formulée pour l'écoulement d'eau à travers un cylindre rempli de sable, d'axe vertical sous la forme suivante:

$$Q = \Lambda A \frac{\Delta h}{L}$$

où Q est le débit, A l'aire de la section droite et L la hauteur du cylindre rempli de sable, Δh la différence de charge hydraulique entre les extrémités inférieure et supérieure du cylindre. Le coefficient Λ dépend des propriétés massives de sable, la loi

de Darcy est donc linéaire. Elle exprime la proportionnalité entre le débit par unité de section $q = \frac{Q}{A}$ appelé vitesse de Darcy et le quotient de la différence de charge par la hauteur $\frac{\Delta h}{L}$ qu'on appelle gradient hydrologique. La forme actuelle de la loi de Darcy est la suivante:

$$q = -\frac{\Lambda}{\mu}(\nabla p - \rho g)$$

où q est la vitesse de Darcy appelée vitesse de filtration, p la pression du fluide, ρ sa masse volumique, μ sa viscosité, g le vecteur de pesanteur et Λ un coefficient dépend uniquement du milieu poreux appelé perméabilité.

Les grandeurs décrivant les propriétés de l'écoulement dans un milieu poreux vérifient en plus de la loi Darcy, la loi de conservation de la masse du fluide (appelé loi de continuité) s'écrit:

$$\Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = f$$

où Φ est la porosité du milieu, f un terme source. Dans le cas d'un fluide incompressible en substituant l'expression de q dans l'équation ci-dessus, on obtient une équation elliptique de forme générale suivante:

$$-\nabla \cdot (K \nabla p) = F$$

Pendant ces dix dernières années un nombre important de méthodes volumes finis pour la discrétisation de problèmes du type:

$$-\nabla \cdot (\Lambda \nabla u) = f,$$

ont été développées et étudiées, on peut citer les importants travaux de R. Eymard [EGH01].

Le travail présenté dans cette mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre est consacré à la présentation générale du problème étudié.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons au couplage entre les équations de Saint-Venant et l'équation de Darcy. Nous présentons d'abord l'équation de transport linéaire scalaire, puis on donne la forme générale du modèle du couplage et quelques exemples simples. Le système couplé consiste à résoudre l'équation de Darcy et les équations de Saint-Venant en respectant certaines contraintes physiques. La discrétisation par un schéma décentré de l'équation de Darcy est décrite ainsi que l'algorithme inspiré de travaux de Pascal Omnes permettant de satisfaire les contraintes physiques de couplage. Ensuite on s'intéresse à développer et analyser les méthodes Volumes Finis pour la résolution de ce type de problèmes, ainsi que l'étude d'erreur a posteriori en vue de l'adaptation de maillage.

Dans le troisième chapitre, on introduit l'estimateur d'erreur et on démontre quelques résultats énoncés dans la deuxième chapitre, ces résultats nous donnent une estimation a posteriori précise de la norme de l'erreur.

le quatrième chapitre expose les résultats numériques. Afin de bien estimer la norme d'erreur, on introduit les quantités locales suivantes:

$$\eta_i^1 = |T_i| \|f - f_i\|_{L^2(T_i)} \quad \text{et} \quad \eta_i^2 = |T_i|^{\frac{1}{2}} |[[u'_h]]_{x_i}|.$$

On donne pour différentes valeurs de la seuil le comportement de ces quantités locales.

Dans le cinquième chapitre on commence à traiter le cas $2D$ on donne les résultats obtenus, le lien se fera lors d'une thèse.

Enfin nous concluons et présentons des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Présentation du Problème

On considère un modèle de couplage entre le modèle de Saint-Venant et un écoulement en milieu poreux, représenté par le système suivant:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial x} = -gh_g \frac{\partial h}{\partial x} - gH \frac{dZ}{dx} \quad (1.2)$$

$$\Phi \frac{\partial h_g}{\partial t} + \frac{\partial p_g}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

$$p_g = -KH \frac{\partial h_g}{\partial x} \quad (1.4)$$

avec h_g est la hauteur d'eau dans le milieu poreux, Φ la porosité de ce milieu, $H = h + h_g$ la somme de la hauteur d'eau de surface et la hauteur d'eau du milieu poreux, Z la hauteur du milieu poreux et K la conductivité hydraulique.

Afin d'étudier le couplage de systèmes d'équations, on commence par étudier d'abord le cas des équations de transport scalaires linéaires. Ensuite on passera au cas des équations de transport non linéaires couplées.

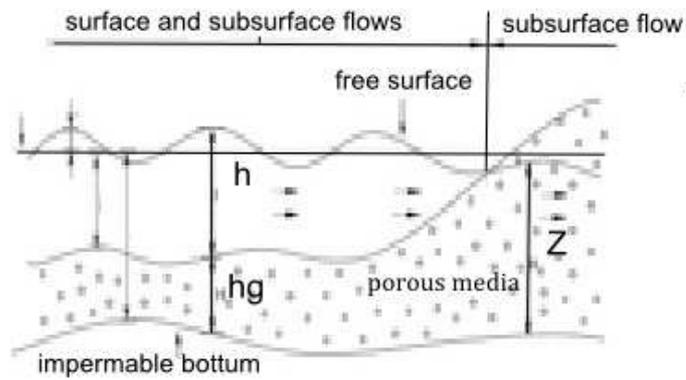


FIGURE 1.1 – écoulements terrains et souterrains

Chapitre 2

Lois de Conservation Scalaire

Sommaire

2.1	Equation de Transport Linéaire Scalaire	24
2.2	Couplage Simple Entre Les Équations de Saint-Venant et Les Équations de Darcy	27
2.2.1	Forme Générale	27
2.2.2	Quelques exemples simples	27
2.2.3	Analyse de la Méthode Volumes Finis	30
2.3	Estimation d'Erreur a posteriori	35

Dans ce chapitre, on commence d'abord par l'étude de l'équation de transport linéaire scalaire, ensuite on donne la forme générale du modèle de couplage entre les équations des Saint-Venant et celles de Darcy. Aussi on s'intéresse à l'étude de l'erreur en effet:

On distingue deux familles d'estimateurs: l'estimateur a priori et l'estimateur a posteriori. L'estimateur a priori nous permet d'assurer la convergence de l'erreur vers zéro, sous réserve d'une régularité suffisante de la solution exacte, qui dépend de divers paramètres comme, par exemple, la géométrie du domaine en présence de trous ou de coins. Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux estimateurs a posteriori. Ils ne dépendent que de la solution numérique et des données du problème, sans nécessiter davantage de régularité sur la solution exacte que celle imposée par la formulation faible.

2.1 Equation de Transport Linéaire Scalaire

On considère l'équation de transport linéaire 1D suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec la fonction de flux: est $f(x,t) = a.u(x,t)$, $a \in \mathbb{R}$

On a: $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, alors si $\frac{dx}{dt} = a$

On a: $\frac{du}{dt} = 0$ et on aura: $u(x,t) = u(x(t),t) = u(t=0) = u_0(x_0)$

Donc en intégrant $\frac{dx}{dt} = a$ on obtient, $\int_{x_0}^x dx = \int_0^t a dt$, ce qui donne l'équation de la courbe caractéristique suivante $x(t) = x_0 + at$.

Le long de cette caractéristique u est constante en effet:

$$\frac{d}{dt} u(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x(t),t) x'(t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

Schéma Volumes Finis

On divise le domaine spatial en N volumes de contrôle $T_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ centré, en $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$, telle que $x_i = i\Delta x$, avec Δx est le pas en espace.

Aussi on divise l'intervalle temporelle en intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ avec $t_n = n\Delta t$, où Δt est le pas du temps. Notons u_i^n cette valeur moyenne dans la $i^{\text{ème}}$ maille de centre x_i , à l'instant $t = n\Delta t$.

Les cellules duales sont notées par $D_{i+\frac{1}{2}} = [x_i; x_{i+1}]$.

On note $h := \sup_{i \in [1, N]} |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}|$.

$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n)$, où $\phi_{i+\frac{1}{2}}^n$ et $\phi_{i-\frac{1}{2}}^n$ sont les flux aux interfaces.

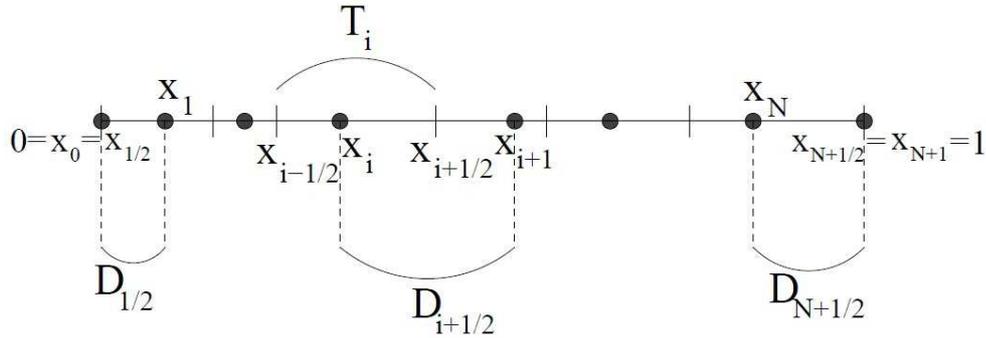


FIGURE 2.1 – Maillage 1D et les notations associés

Exemple: Schéma Décentré d'ordre 1

Ce schéma utilise une discrétisation décentrée du terme convectif $a \frac{\partial u}{\partial x}$, appelé terme de convection de u par la vitesse a . Si $a > 0$ u est transportée de la gauche vers la droite (et inversement si $a < 0$).

$$\text{D'où: } a \frac{\partial u}{\partial x} \approx a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{si } a > 0, \quad a \frac{\partial u}{\partial x} \approx a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad \text{si } a < 0$$

Supposons que $a > 0$, le schéma décentré s'écrit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Etude de Stabilité

Notons $\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ le schéma décentré s'écrit sous la forme conservative comme suit:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) = (1 - \nu)u_i^n + \nu u_{i-1}^n \\ |u_i^{n+1}| &= |(1 - \nu)u_i^n + \nu u_{i-1}^n| \leq |1 - \nu| |u_i^n| + \nu |u_{i-1}^n| \leq |1 - \nu| \|u^n\|_\infty + \nu \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Comme on la condition CFL (courant de Friedrichs el Lewy):

$$\begin{aligned} |\nu| \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \nu \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \nu \leq 1 \\ \Rightarrow |u_i^{n+1}| &\leq (1 - \nu + \nu) \|u^n\|_\infty \Rightarrow \|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le schéma décentré est stable.

soient les deux conditions initiales suivantes :

$$\bullet u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 < 0 \\ 2 & \text{si } x_0 > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \bullet u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x_0 < 0 \\ 0 & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$$

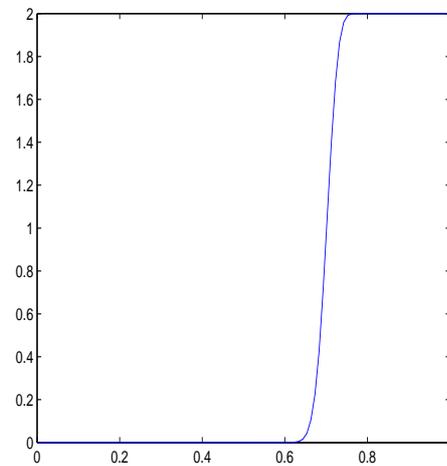
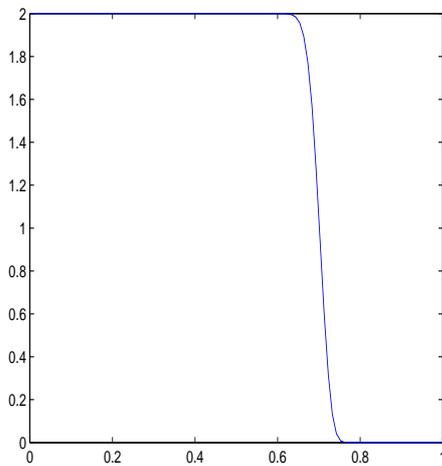


FIGURE 2.2 – courbes de la solution u , respectivement choc et détente avec le schéma décentré, $cf=0.75$

2.2 Couplage Simple Entre Les Équations de Saint-Venant et Les Équations de Darcy

Dans cette partie nous traitons le cas des équations de transport non linéaires couplées.

2.2.1 Forme Générale

Les équations de couplage entre les équations de transport et les équations de Darcy sont données par le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{sur } \Omega = [0, 1] \\ \frac{\partial a}{\partial x} = f(x,t), \\ a = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P(0,t) = c, \quad P(1,t) = d, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pour la résolution numérique de l'équation de transport, on choisit le schéma décentré:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a_j^{n,+} \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} + a_j^{n,-} \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

$$\text{avec : } a_j^n = a(x_j, t_n), \quad a_j^{n,+} = \frac{1}{2}(a_j^n + |a_j^n|), \quad \text{et} \quad a_j^{n,-} = \frac{1}{2}(a_j^n - |a_j^n|)$$

2.2.2 Quelques exemples simples

Exemple où on peut calculer a exactement (voir le chapitre 4)

Ici on prend $c = 1$, $d = 2$

$$*f(x,t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = f(x,t) = 0 \Rightarrow P(x,t) = x + 1$$

$$\Rightarrow a(x,t) = \frac{\partial P}{\partial x} = 1 = \text{constante}$$

$$*f(x,t) = 1, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = f(x,t) = 1 \Rightarrow P(x,t) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + 1$$

$$\Rightarrow a(x, t) = \frac{\partial P}{\partial x} = x + \frac{1}{2}$$

$$*f(x, t) = x, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = f(x, t) = x \Rightarrow P(x, t) = \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x + 1$$

$$\Rightarrow a(x, t) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}$$

$$*f(x, t) = t, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = f(x, t) = t$$

$$\Rightarrow P(x, t) = \frac{1}{2}tx^2 + (1 - \frac{1}{2}t)x + 1$$

$$\Rightarrow a(x, t) = \frac{\partial P}{\partial x} = tx + 1 - \frac{1}{2}t$$

Exemple où on doit calculer a numériquement

Exemple 5: $f(x, t) = u = u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = u(x, t) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \int_{\hat{\gamma}}^x u(s, t) ds + c(t) \Rightarrow P(x, t) = \int_{\hat{\gamma}}^x \frac{\partial P}{\partial x}(r, t) dr + d(t)$$

$$= \int_{\hat{\gamma}}^x \left[\int_{\hat{\gamma}}^r u(s, t) ds + c(t) \right] dr + d(t) \Rightarrow P(x, t) = \int_{\hat{\gamma}}^x \int_{\hat{\gamma}}^r u(s, t) ds dr + c(t)(x - \hat{\gamma}) + d(t)$$

$$P(0, t) = 1 = \int_{\hat{\gamma}}^0 \int_{\hat{\gamma}}^r u(s, t) ds dr + c(t)(0 - \hat{\gamma}) + d(t)$$

$$\text{On pose } \hat{\gamma} = 0 \Rightarrow 1 = d(t) \Rightarrow P(1, t) = 2 = \int_0^2 \int_{\hat{\gamma}}^r u(s, t) ds dr + 1$$

Dans cet exemple, on ne peut pas exploiter cette formule, on doit donc résoudre l'équation numériquement. D'abord écrivons l'équation de transport sous forme conservative.

équation sous forme conservative:

On veut écrire le système (1.2) sous la forme conservative. On a :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} - u(x, t) \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} = \text{(2.3)}$$

Or,

$$\frac{\partial (a(x, t) \cdot u(x, t))}{\partial x} = a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \quad (2.4)$$

Ici on prend $c = 1$, $d = 2$

alors on a l'équivalence suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{sur } \Omega = [0, 1] \\ \frac{\partial a}{\partial x} = f(x,t), \\ a = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P(0,t) = 1, \quad P(1,t) = 2, \quad \forall t > 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(a(x,t)u(x,t))}{\partial x} = u(x,t) \frac{\partial a(x,t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial a}{\partial x} = f(x,t), \\ a = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P(0,t) = 1, \quad P(1,t) = 2, \quad \forall t > 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(a(x,t)u(x,t))}{\partial x} = u^2(x,t), \\ \frac{\partial a}{\partial x} = f(x,t), \\ a = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P(0,t) = 1, \quad P(1,t) = 2, \quad \forall t > 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Ainsi, on obtient l'équation avec terme source suivante:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(u(x,t)a(x,t))}{\partial x} = u^2(x,t) \quad (2.8)$$

pour le terme de gauche on utilisera le schéma de Roe (voir annexe A), le terme source sera par un schéma équilibre.

Numériquement:

À chaque $t = t_n = n\Delta t$

Algorithme:

(1) Résoudre: $-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = u.$

$$\Rightarrow \frac{-P_{j-1}^n + P_j^n - P_{j+1}^n}{\Delta x^2} = U_j^n + CB \Leftrightarrow AP = U$$

On résoud le système linéaire $AP = U$ avec la méthode de Gauss-Seidel.

(2) Résoudre: $a = -\frac{\partial P}{\partial x} \Leftrightarrow a_j^n = -\frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta x}, a_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{P_{j+1}^n - P_j^n}{\Delta x}$

(3) Résoudre: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a.u)}{\partial x} = u^2$

avec flux de Roe équilibre, donné par:

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^{Roe} = \frac{1}{2} (a_j^n U_j^n + a_{j+1}^n U_{j+1}^n) - \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}^n| (U_{j+1}^n - U_j^n)$$

Nous contestons donc que nous sommes amenés à résoudre des problèmes elliptiques du type:
 $-\Delta P = f.$

La section suivant a pour but de développer et analyser les méthodes Volumes Finis pour la résolution de ce type de problèmes, ainsi que l'étude d'erreur a posteriori en vu de l'adaptation de maillage.

2.2.3 Analyse de la Méthode Volumes Finis

Définition 2.1 Soit u la solution du problème et soit (T_i) un maillage Volumes Finis de $\Omega = [0, 1]$. On appelle:

– FLUX EXACT en $x_{i+\frac{1}{2}}$, la quantité $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$

– FLUX NUMÉRIQUE en $x_{i+\frac{1}{2}}$, la quantité $F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$

– FLUX APPROCHÉ en $x_{i+\frac{1}{2}}$, la quantité $F_{i+\frac{1}{2}}^* = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$: approximation du flux

exacte utilisé pour construire le flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}$.

Définition 2.2 Soit u la solution exacte du problème et soit (T_i) un maillage Volumes Finis de $\Omega = [0, 1]$

- On appelle erreur de consistance sur le flux, la quantité définie pour $i = 0, \dots, N$ par:

$$R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^* = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}.$$

- On dit que le flux numérique est consistant d'ordre p s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u (et ses dérivées) telle que pour tout $i = 0, \dots, N$, on a:

$$|R_{i+\frac{1}{2}}| = |\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*| \leq Ch^p$$

Lemme 2.3 Soit $u \in C^\infty([0, 1])$ la solution exacte du problème et soit (T_i) un maillage Volumes Finis de $\Omega = [0, 1]$. Le flux numérique est consistant d'ordre 1. Plus précisément, il existe une constante positive C ne dépendant que de $\|u''\|_\infty$ telle que pour tout $i = 0, \dots, N$:

$$|R_{i+\frac{1}{2}}| = |\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*| \leq Ch.$$

Preuve 2.4 Il s'agit donc d'estimer pour $i = 0, \dots, N$ la quantité:

$$R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^* = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}.$$

par Taylor-Young, on a les deux formules:

$$u(x_i) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + (x_i - x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2 u''(\xi_i); \xi_i \in [x_i, x_{i+\frac{1}{2}}]$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + (x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2 u''(\eta_i); \eta_i \in [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}]$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = (x_{i+1} - x_i)u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2 u''(\eta_i) - \frac{1}{2}(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2 u''(\xi_i)$$

$$R_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2}{(x_{i+1} - x_i)} u''(\eta_i) - \frac{(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2}{(x_{i+1} - x_i)} u''(\xi_i) \right].$$

En posant $u''(\theta_i) = \max(u''(\eta_i); u''(\xi_i))$

et en remarquant que $(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2 + (x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2 \leq (x_{i+1} - x_i)^2$ on a:

$$|R_{i+\frac{1}{2}}| \leq \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(|u''(\theta_i)|) \leq h|u''(\theta_i)| \leq Ch$$

avec $C = |u''(\theta_i)|$, car: $x_{i+1} - x_i = (x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}) + (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i) \leq 2h$ où $h = \max_{1 \leq i \leq N} (h_i)$

Définition 2.5 (Conservativité)

On dit que le schéma volumes finis est conservatif, au sens où, lorsqu'on considère une interface $x_{i+\frac{1}{2}}$ entre les mailles T_i, T_{i+1} , le flux numérique entrant dans une maille est égale à celui sortant de l'autre.

C'est grâce à la conservativité et à la consistance des flux qu'on va montrer la convergence du schéma volumes finis.

Convergence - Etude de l'erreur

PRINCIPE: essayer de développer une approche propre à la méthode des Volumes Finis s'appuyant sur la notion de flux.

Théorème 2.6 (convergence-estimation de l'erreur de discrétisation) On suppose que la solution du problème De Dirichlet vérifie $u \in C^\infty([0, 1])$ et on rappelle que u_i est la solution approchée par la méthode des Volumes Finis. On pose $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $i = 1, \dots, N$ l'erreur de discrétisation. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de u telle que:

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h} \leq C h^2$$

$$\|e\|_{L^2} = \left(\sum_{i=1}^N h e_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h$$

$$\|e\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq C h$$

Preuve 2.7 • On commence par la première des 3 inégalités. Pour cela, on cherche l'équation satisfaite par le vecteur erreur e . On va utiliser les flux introduits précédemment. Rappelons que le schéma s'écrit pour $i = 1, \dots, N$

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = h f_i \quad \text{Tandis que l'EDP intégrée sur } K_i \text{ s'écrit pour } i = 1, \dots, N$$

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h f_i$$

Notons $G_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}$, par différence, on obtient donc que

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}} = 0$$

Où encore, $G_{i+\frac{1}{2}} - G_{i-\frac{1}{2}} = 0$, $i = 1, \dots, N$

En introduisant $R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*$, on obtient:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^* + F_{i-\frac{1}{2}} = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}}$$

ce qui, compte tenu de la définition des (e_i) peut se réécrire sous la forme,

$$-\frac{1}{h}(e_{i+1} - e_i) + \frac{1}{h}(e_i - e_{i-1}) = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}} \quad i = 1, \dots, N$$

On commence par utiliser la consistance du schéma. Pour cela, on multiplie cette dernière égalité par e_i et on somme de 1 à N :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N -\frac{1}{h}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{h}(e_i - e_{i-1})e_i &= \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=1}^N R_{i-\frac{1}{2}}e_i \text{ ce qui s'écrit encore:} \\ \sum_{i=1}^N -\frac{1}{h}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h}(e_{i+1} - e_i)e_{i+1} &= \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i-\frac{1}{2}}e_{i+1} \end{aligned}$$

En réordonnant les termes, on obtient, en remarquant que $e_0 = 0$ et $e_{N+1} = 0$:

$$\sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} = \sum_{i=0}^N R_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i)$$

Or, par consistance on a pour tout i : $|R_{i+\frac{1}{2}}| \leq C h$ (cette estimation impose l'ordre de la méthode)

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} \leq C h \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h}} \sqrt{h} \text{ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:}$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} \leq C h \left(\sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|^2}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=0}^N h \right)^{\frac{1}{2}}$$

En remarquant que $\sum_{i=0}^N h = 1$, on déduit que:

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} \leq C h \left(\sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|^2}{h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et donc: } \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h.$$

d'ou la première inégalité.

Puisque $e_0 = 0$, la seconde inégalité est une conséquence directe de l'inégalité de Poincaré discrète compte tenu de l'inégalité qui vient d'être montrée.

Démontrons la dernière inégalité, pour obtenir une majoration de $|e_i|$ par $C h$, on remarque que:

$$|e_i| = \left| \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} \right| \leq \sum_{j=1}^i |e_j - e_{j-1}| \leq \sum_{j=1}^N |e_j - e_{j-1}|.$$

On en déduit, par l'inégalité de Cauchy-Scharwz, que:

$$|e_i| \leq \left(\sum_{j=1}^N \frac{|e_j - e_{j-1}|^2}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N h \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui entraîne $\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq C h$.

Remarque 2.8

L'estimation de l'erreur donnée dans cette section n'utilise pas le principe du maximum discret (c'est le fait que $f_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N, \Rightarrow u_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N$), mais la coercivité de l'opérateur elliptique. La démonstration ci-dessus de convergence fournit une estimation d'erreur d'ordre h . Si au moins $u \in C^4([0, 1], \mathbb{R})$, et si x_i est le centre de K_i pour tout $i = 1, \dots, N$. On obtient, dans ce cas, $|e_i| \leq C h^2$, pour tout $i \in 1, \dots, N$, où C ne dépend que de u . Si x_i n'est pas le centre de K_i (ce sera le cas général dans plusieurs dimensions de l'espace), alors on n'a pas (en général) $|\tilde{e}_i| \leq C_3 h^2$ (pour certains C_3 seulement en fonction de u) avec $\tilde{e}_i = \bar{u}_i - u_i$ où \bar{u}_i désigne la valeur moyenne de u sur K_i .

2.3 Estimation d'Erreur a posteriori

L'étude des estimations d'erreur a posteriori pour la méthode des volumes finis est plus récente que pour la méthode des éléments finis. L'un des premiers résultats a été obtenu par Angermann [13]. Dans ce travail, Angermann a étudié des estimations d'erreur a posteriori pour la discrétisation des équations de convection-diffusion stationnaires en dimension 2 par la méthode des volumes finis sur des maillages de Voronoï.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur a posteriori. L'intérêt de ces estimations est de fournir des bornes sur l'erreur qui peuvent être évaluées dès que la solution approchée a été calculée. En effet, ces bornes sont évaluées uniquement en fonction de la solution calculée, des données du problème et des données du maillage.

On appelle estimateur d'erreur a posteriori une estimation de la norme de l'erreur

$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}$, ne faisant intervenir que la solution numérique, la donnée f et géométrie du maillage.

Un estimateur robuste assure que l'estimation d'erreur a posteriori va être de la même qualité dans toutes les situations

But:

Chercher une estimation de l'estimateur d'erreur a posteriori $\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}$.

On pose $v = u - u_h$, où u_h est la solution numérique de la formulation éléments finis. On note v_h^* la fonction constante par morceaux égale à $v_h(x_i)$ sur cellule T_i , pour $v_h \in V_h$. h étant le pas de maillage.

Nous introduisons les quantités suivantes:

$$\text{Err}(\text{résidu}) = \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Err}(\text{saut}) = \left(\sum_{i=1}^N \|[u_h']_{x_i}\|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Err} = \text{Err}(\text{résidu}) + \text{Err}(\text{saut})$$

On désignera par estimateur résiduel $\text{Err}(\text{résidu})$, estimateur diffusif $\text{Err}(\text{saut})$ et estimateur globale ou erreur estimée Err .

L'indice d'efficacité (qu'on désignera par abus de langage efficacité) de l'estimateur définit par:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\text{Err}}{\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Un indice d'efficacité proche de 1 implique que l'erreur n'a pas été trop surévaluée. Lorsque

$\lim_{h \rightarrow 0} I_{\text{eff}} = 1$, on parle d'exactitude asymptotique.

Proposition 2.9 *Il existe une constante C indépendante du maillage et de v telle que:*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N \|[u_h']_{x_i}\|_{x_i}^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.9)$$

avec:

$$\text{Err}(\text{résidu}) = \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Err}(\text{saut}) = \left(\sum_{i=1}^N \|[u_h']_{x_i}\|_{x_i}^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

En effet ;

Pour toute fonction $v_h \in V_h$ on a:

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (u', v')_{L^2(\Omega)} - (u_h', v')_{L^2(\Omega)} \\ &= (-u'', v)_{L^2(\Omega)} - (u_h', v')_{L^2(\Omega)} \\ &= (f, v)_{L^2(\Omega)} - (u_h', v')_{L^2(\Omega)} \\ &= (f, v)_{L^2(\Omega)} - (u_h', v')_{L^2(\Omega)} - (f, v_h^*)_{L^2(\Omega)} + (u_h', v_h')_{L^2(\Omega)} \\ \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)} + (u_h', (v_h - v)')_{L^2(\Omega)} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Comme l'égalité (2.10) étant vérifiée pour tout $v_h \in V_h$, on peut choisir v_h telle que:

$$\forall i \in [1; N] \quad v_h(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx \quad (2.11)$$

On admet le Lemme suivante (voir le chapitre 3)

Lemme 2.10 *Il existe une constante C_1 indépendante du maillage et de v telle que:*

$$\forall i \in [1; N] \quad \|v - v_h^*\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Par définition de v_h^* , on a:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v_h^*(x) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v_h(x_i) dx = h v_h(x_i) = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx$$

d'où $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(v - v_h^*)(x)dx = 0$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} (f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(f)(v - v_h^*)(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(f - f_i)(v - v_h^*)(x)dx \\ |(f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)}| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(f - f_i)|v - v_h^*|dx \end{aligned}$$

En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$|(f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)}| \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} |f - f_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} |v - v_h^*|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme on a: $|\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^N |\beta_i|^2$, pour tout $\alpha_i, \beta_i \in L^2(T_i)$

On aura donc:

$$\begin{aligned} |(f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)}| &\leq \sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(T_i)} h C_1 \|v'\|_{L^2(T_i)} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(T_i)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \|v'\|_{L^2(T_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(T_i)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Comme u'_h est constant sur $[x_i; x_{i+1}]$, posons $u'_h(x) = (u'_h)|_{D_{i+\frac{1}{2}}}$ pour $x \in]x_i; x_{i+1}[$, on obtient alors:

$$\begin{aligned} (u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u'_h (v_h - v)'(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h (v_h - v)'(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^N (u'_h)|_{D_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_h - v)'(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^N (u'_h)|_{D_{i+\frac{1}{2}}} [(v_h - v)(x_{i+1}) - (v_h - v)(x_i)] \end{aligned}$$

Puis par un changement d'indice et en notant $[[u'_h]]_{x_i} = (u'_h)|_{D_{i-\frac{1}{2}}} - (u'_h)|_{D_{i+\frac{1}{2}}}$

$$(u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N [[u'_h]]_{x_i} (v_h - v)(x_i)$$

On admet que pour le choix de v_h respectant (2.11), le lemme suivante (voir le chapitre 3)

Lemme 2.11 *Il existe une constante C_2 indépendante du maillage et de v telle que:*

$$\forall i \in [1; N] \quad |(v_h - v)(x_i)| \leq C_2 h^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

,

En utilisant l'inégalité triangulaire, on aura:

$$|(u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)}| \leq \sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}| |(v_h - v)(x_i)|$$

Comme $\forall i \in [1; N] \quad |(v_h - v)(x_i)| \leq C_2 h^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(T_i)}$, on obtient donc:

$$|(u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)}| \leq C_2 \sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}| h^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors:

$$\begin{aligned} |(u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)}| &\leq C_2 \left(\sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}| h^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \|v'\|_{L^2(T_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}|^2 h^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(T_i)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par les équations (2.10), (2.12) et (2.13), on obtient en notant que: $v = u - u_h$

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (f, v - v_h^*)_{L^2(\Omega)} + (u'_h, (v_h - v)')_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \left(\sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Où $C = \max(C_1, C_2)$

On note $\eta_i^1 = h \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}$ et $\eta_i^2 = h^{\frac{1}{2}} |[[u'_h]]_{x_i}|$. On a alors:

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\left(\sum_{i=1}^N (\eta_i^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N (\eta_i^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{On note aussi, } \eta = \left(\sum_{i=1}^N (\eta_i^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N (\eta_i^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Alors, } \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \eta$$

On suppose maintenant que f est dans $H^1(\Omega)$. On a alors une inégalité du type (2.11)

Il existe une constante C_3 telle que:

$$\forall i \in [1; N] \quad \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 h \|f'\|_{L^2(T_i)}^2$$

L'équation (2.13) devient:

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left[\left(\sum_{i=1}^N (C_3)^2 \|f'\|_{L^2(T_i)}^2 h^4 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N \llbracket u_h' \rrbracket_{x_i}^2 |h| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \bar{C} \left[\left(\sum_{i=1}^N \|f'\|_{L^2(T_i)}^2 h^4 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^N \llbracket u_h' \rrbracket_{x_i}^2 |h| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Où } \bar{C} = \max(1, C_3)$$

Chapitre 3

Démonstrations de Lemmes Admis

Sommaire

3.1 Démonstrations de Lemmes Admis	41
---	-----------

Dans ce chapitre on démontre les deux lemmes énoncés dans le chapitre 2.

Soit le problème elliptique 1D, suivante:

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur } \Omega =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Démonstrations de Lemmes Admis

Lemme 3.1

Soit $v = u - u_h$, où u est la solution exacte du problème (1.1), u_h est la solution numérique de la formulation éléments finis.

On note v_h^* la fonction constante par morceaux égale à $v_h(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx$ sur la cellule T_i , pour $v_h \in V_h$, avec:

$$V_h = \{w_h \in H_0^1(\Omega); \quad w_h|_{[x_i; x_{i+1}]} \in P1 \quad \text{et} \quad w_h(0) = w_h(1) = 0\}$$

alors, il existe une constante C_1 indépendante du maillage et de v telle que:

$$\forall i \in [1; N] \quad \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)} \leq C_1 h \|v'\|_{L^2(T_i)} \quad (5.5)$$

Preuve 3.2

en effet, on a:
$$\frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}} \leq \sup_{v \neq \text{cste}, v \in H^1(T_i)} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}}$$

On pose:
$$A = \sup_{v \in H^1(T_i) \setminus \mathbb{R}} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2}, \quad \text{et} \quad A' = \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 = 1} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2}$$

Alors on montre, $A = A'$ (voir annexe C).

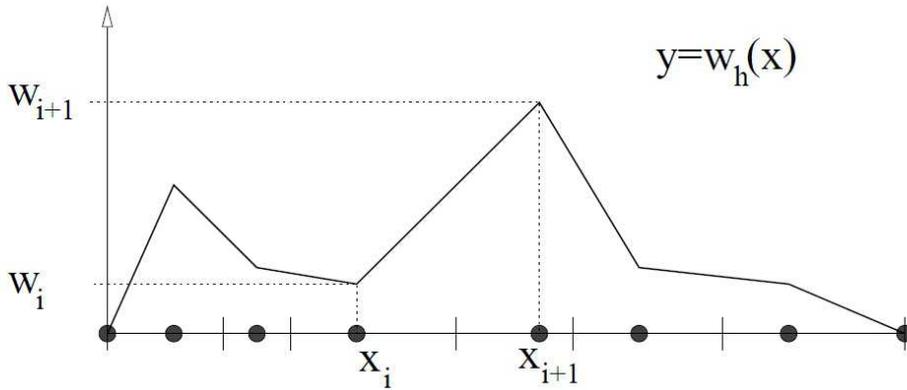


FIGURE 3.1 – La fonction w_h associée aux valeurs $(w_i)_{i \in [0, N+1]}$

On considère le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \sup \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2, & v, v_h^* \in V_h \\ \text{sous contrainte } \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 = 1, & v \in V_h \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit: $G(v) = \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2$, $H(v) = \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 - 1$

ainsi, le problème (1.2) est équivalent au problème suivant:

$$\begin{cases} \sup G(v), & v \in V_h \\ \text{sous contrainte } H(v) = 0, & v \in V_h \end{cases} \quad (3.3)$$

On montre que (voir l'annexe D):

$$\begin{cases} G'(v).w = 2(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)}, & \forall w \in V_h \\ H'(v).w = 2(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)}, & \forall w \in V_h \end{cases} \quad (3.4)$$

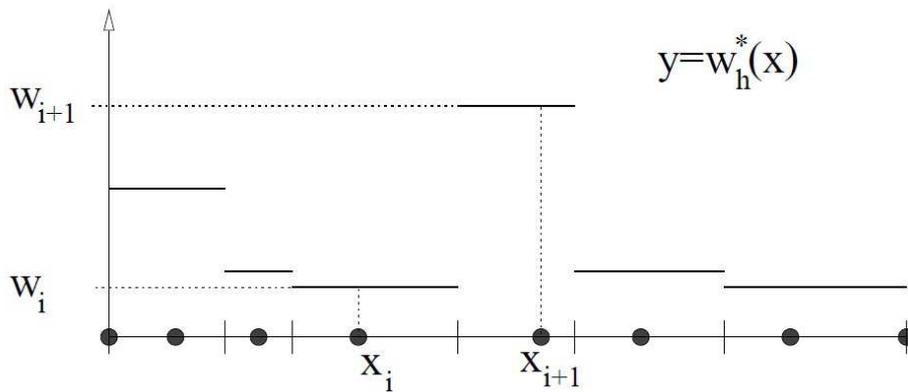


FIGURE 3.2 – La fonction w_h^* associée aux valeurs $(w_i)_{i \in [1, N]}$

équivalence du problème d'optimisation dans le cas 1D

Soit v^* tel que $G(v^*) = \sup_{v \in V_h} G(v)$ avec $H(v) = 0$ alors,

Il existe λ tel que si $T = G + \lambda H$, implique que $T'(v^*) = G'(v^*) + \lambda H'(v^*) = 0$

dans cas 1D il suffit de prendre $\lambda = -\frac{G'(v^*)}{H'(v^*)}$, donc v^* est un extremum de T

comme $T(v^*) = G(v^*) + \lambda H(v^*) = G(v^*)$,

alors on peut écrire l'équivalence suivante:

Chercher l'extremum de G sous contrainte $H = 0$, est équivalent à chercher l'extremum v^* de T .

Autrement dit, le problème s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \text{ tel que} \\ (G'(v) - \lambda H'(v)).w = 0, \quad \forall w \in V_h \end{cases} \quad (3.5)$$

maintenant, comme on a (voir l'annexe D):

$$G'(v).w = 2(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} \text{ et } H'(v).w = 2(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)}$$

en remplaçons, les expressions de G' (resp. de H') dans le problème (1.4), on aura:

$$(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} - \lambda(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} = 0 \quad \forall w \in V_h$$

commençons, par le première terme $(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)}$, on a:

$$(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} = (v - v_h^*, w)_{L^2(T_i)} - (v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)}$$

comme $(v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} = 0$, alors

$$(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} = (v - v_h^*, w)_{L^2(T_i)} = (v, w)_{L^2(T_i)} - (v_h^*, w)_{L^2(T_i)}$$

ensuite pour le second terme de l'égalité $(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)}$, d'abord on a:

$$\operatorname{div}(\nabla v . w) = \nabla w . \nabla v + w . \operatorname{div}(\nabla v) \Rightarrow \int_{T_i} \operatorname{div}(\nabla v . w)(x) dx = \int_{T_i} \nabla w . \nabla v(x) dx + \int_{T_i} w . \operatorname{div}(\nabla v)(x) dx$$

On note $\sigma = \partial T_i$: le bord de T_i , et n : le vecteur normal unitaire extérieur à σ .

Or, d'après la formule de la divergence, on a: $\operatorname{div}(\nabla v . w) = \int_{\sigma} w . \nabla v . n d\sigma$

$$\text{Ce qui donne: } \int_{\sigma} w . \nabla v . n d\sigma = \int_{T_i} \nabla w . \nabla v(x) dx + \int_{T_i} w . \Delta v(x) dx$$

par conséquent: $(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} = -(\Delta v, w)_{L^2(T_i)} + (\nabla v . n, w)_{L^2(\sigma)}$

finallement on obtient l'équivalence suivante:

$$\begin{cases} (v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} - \lambda(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} = 0 \quad \forall w \in V_h \\ \Downarrow \\ (v - v_h^*, w)_{L^2(T_i)} + \lambda(\Delta v, w)_{L^2(T_i)} - \lambda(\nabla v . \vec{n}, w)_{L^2(\sigma)} = 0 \quad \forall w \in V_h \end{cases} \quad (3.6)$$

on a donc:

$$\begin{cases} (v - v_h^* + \lambda \Delta v, w)_{L^2(T_i)} = 0 & \forall w \in V_h \\ (\nabla v \cdot n, w)_{L^2(\sigma)} = 0 & \forall w \in V_h \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarque 3.3 Dans le cas monodimensionnel, (4.6) est équivalent à:

$$\int_0^h ((v - v_h^* + \lambda v'').w)(x) dx - \lambda [w.v']_0^h = 0, \quad \forall w \in V_h$$

d'où pour tout $w \in V_h$ tel que:

$$[w.v']_0^h = 0 \Rightarrow \int_0^h ((v - v_h^* + \lambda v'').w)(x) dx = 0, \quad \forall w \in V_h / [w.v']_0^h = 0$$

$$\Rightarrow v - v_h^* + \lambda v'' = 0$$

$$\text{Or, } [w.v']_0^h = w(h)v'(h) - w(0)v'(0)$$

ainsi, pour $w \in V_h / w(h) = 0$ on obtient: $v'(0) = 0$

aussi, pour $w \in V_h / w(0) = 0$ on obtient: $v'(h) = 0$

par suite, $v'(0) = v'(h) = 0$

le problème (1.16) devient:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \text{ tel que} \\ v - v_h^* + \lambda v'' = 0, \quad v, v_h^* \in V_h \\ v'(0) = v'(h) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Revenons au cas général, comme ceci est vrai pour tout w , alors on obtient (4.6) est équivalent à:

$$\begin{cases} v - v_h^* + \lambda \Delta v = 0 \\ \nabla v \cdot n = 0 \text{ sur } \sigma \end{cases} \quad (3.9)$$

On rappelle que v_h^* est la fonction constante par morceaux égale à:

$$v_h(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx \text{ sur la cellule } T_i$$

alors le problème (4.7) est équivalent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \text{ et } \lambda \text{ tels que} \\ v + \lambda \Delta v = 0 \\ \nabla v \cdot n = 0 \text{ sur } \sigma \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Formulation du problème d'optimisation dans le cas monodimensionnel

Dans le cas 1D le problème (4.6) est équivalente à résoudre, sur l'intervalle $]0, h[$, avec h étant le pas de maillage, l'équation différentielle de seconde: $nv + \lambda v'' = 0$. ainsi en résolvant cette dernière équation, et en utilisant les conditions aux bords (voir l'annexe F), on obtient la valeur de λ qui vaut:

$$\lambda = \frac{h^2}{k^2 \pi^2} \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{h^2}{\pi^2} \text{ comme, } \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 = \lambda \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2} \Rightarrow \sup \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}} = \frac{h}{\pi}$$

$$\text{finalement } \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)} \leq \frac{h}{\pi} \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}$$

ainsi, il existe existence d'une constante C_1 indépendante du maillage et de v telle que:

$$\forall i \in [1; N] \quad \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)} \leq C_1 h \|v'\|_{L^2(T_i)} \text{ avec } C_1 = \frac{1}{\pi}.$$

Exemple 3.4 (Cas 1D (voir l'annexe E))

Lemme 3.5 Il existe une constante C_2 indépendante du maillage et de v telle que:

$$\forall i \in [1; N] \quad |(v_h - v)(x_i)| \leq C_2 h^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

Preuve 3.6

$$\text{On a: } v(x_i) - v_h(x_i) = v(x_i) - \frac{1}{h} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} v(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} (v(x_i) - v(x)) dx$$

$$v(x) = v(x_i) + (x - x_i)v'(\bar{x}), \quad \text{avec } \bar{x} \in T_i \Rightarrow v(x) - v(x_i) = (x - x_i)v'(\bar{x}) \quad |v(x_i) - v_h(x_i)| = \frac{1}{h} \left| \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} (v(x) - v(x_i)) dx \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} (x - x_i)v'(\bar{x}) dx \right|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|v(x_i) - v_h(x_i)| \leq \frac{1}{h} \|x - x_i\|_{L^2(T_i)} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

$$\text{Or, } \|x - x_i\|_{L^2(T_i)}^2 = \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} (x - x_i)^2 dx = \left[\frac{(x - x_i)^3}{3} \right]_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{h^3}{12}$$

$$\Rightarrow \|x - x_i\|_{L^2(T_i)} = \frac{\sqrt{h} h}{\sqrt{12}} \Rightarrow |v(x_i) - v_h(x_i)| \leq \frac{1}{h} \frac{\sqrt{h} h}{\sqrt{12}} \|v'\|_{L^2(T_i)} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{12}} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

Soit $C_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}$, qui ne dépend pas du maillage et de v .

Donc

$$|v(x_i) - v_h(x_i)| \leq C_2 \sqrt{h} \|v'\|_{L^2(T_i)}$$

Chapitre 4

Tests Numériques

D'après l'étude théorique on a obtenue une estimation a posteriori, de la norme de l'erreur, $\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}$, ne faisant intervenir que la solution numérique u_h , la donnée f et la géométrie du maillage, telle que:

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \left(\sum_{i=1}^N \|[u_h']_{x_i}\|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce chapitre on présente une structure générale d'un algorithme adaptatif pour un notre problème elliptique et on décrit les différentes techniques de marquage, de raffinement et de dé-raffinement présentes. Ensuite on présente quelques résultats numériques.

ALGORITHME ADAPTATIF

Notre but est de concevoir un algorithme permettant de garantir que l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est inférieure à une certaine tolérance donnée. L'adaptation de maillage basée sur une estimation d'erreur a posteriori consiste à calculer les quantités locales suivantes:

$$\eta_i^1 = |T_i| \|f - f_i\|_{L^2(T_i)} \quad \text{et} \quad \eta_i^2 = |T_i|^{\frac{1}{2}} |[[u'_h]]_{x_i}|$$

Le calcul de ces quantités va nous permettre de décider quelles cellules doivent être raffinées en priorité.

L'algorithme comporte 4 étapes:

1) RESOLUTION: On résout le schéma volumes finis sur un maillage donné.

2) ESTIMATION: On calcule cellule par cellule les quantités η_i^1 et η_i^2 ainsi que

$\eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2$ et $\eta = \left(\sum_i (\eta_i^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i (\eta_i^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Si η est inférieur à un certain seuil choisi par l'utilisateur, alors on s'arrête. Sinon on passe à l'étape 3).

3) MARQUAGE: Si η_i est supérieur à la valeur moyenne des (η_j) , alors T_i est marqué comme devant être raffiné.

4) RAFFINEMENT: On génère un nouveau maillage en découpant les cellules marquées en 3) en deux sous-cellules de même longueur. Retour à 1).

On pose les quantités suivantes:

$$\text{erreur} = \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{efficacité} = \frac{C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|f - f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \left(\sum_{i=1}^N |[[u'_h]]_{x_i}|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}}{\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}}$$

$$\text{avec, } C_1 = \frac{1}{\pi} \text{ et } C_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

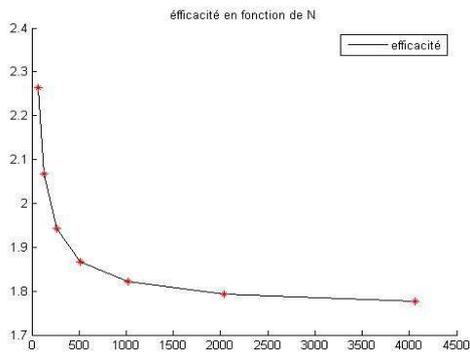
On applique les estimations d'erreur a posteriori du chapitre 2 et l'algorithme adaptatif présenté à notre problème elliptique.

Ensuite, pour différentes seconde terme f , on trace les courbes des ces dernières quantités.

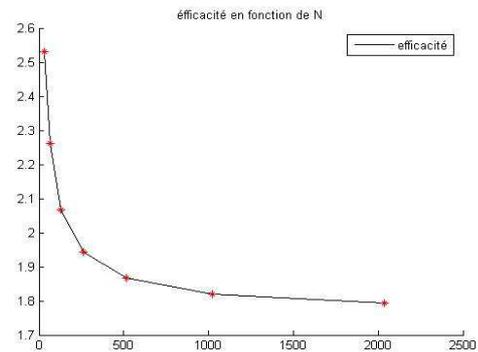
- $f(x) = \exp(x)$, le problème elliptique 1D s'écrit:

$$\begin{cases} -u''(x) = \exp(x) & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec, $u_{\text{exacte}}(x) = -\exp(x) + (\exp(1) - 1)x + 1$.

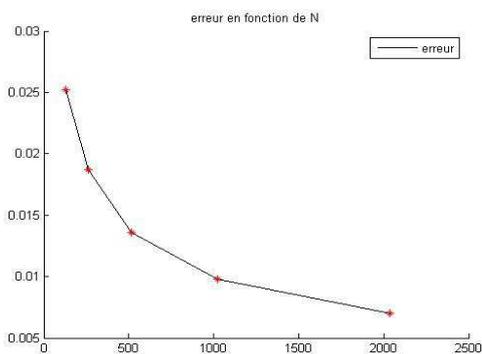


efficacité avec, seuil=0.03, N=10pts

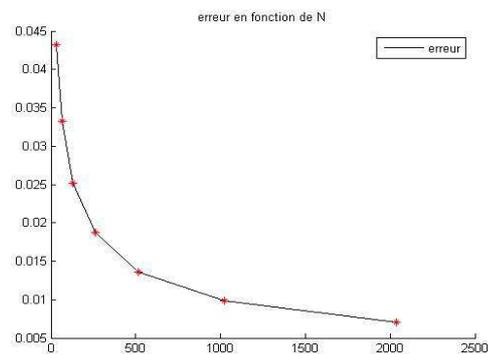


efficacité avec, seuil=0.04, N=10pts

FIGURE 4.1 – courbes de l'efficacité pour $f(x) = \exp(x)$



erreur avec, seuil=0.03, N=10pts



erreur avec, seuil=0.04, N=10pts

FIGURE 4.2 – courbe de l'erreur pour $f(x) = \exp(x)$

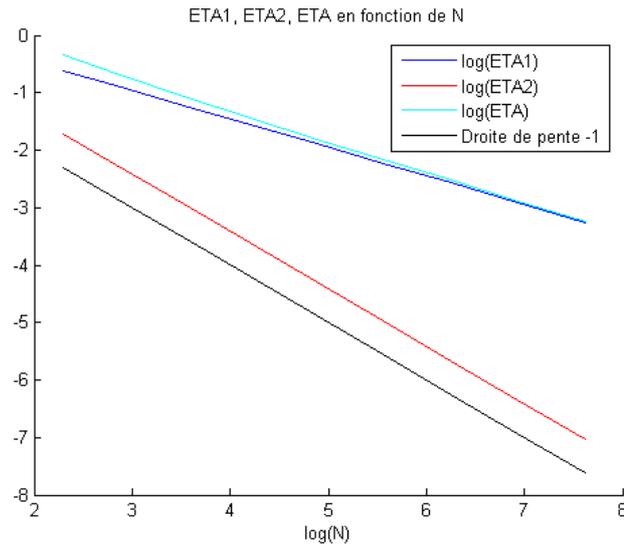
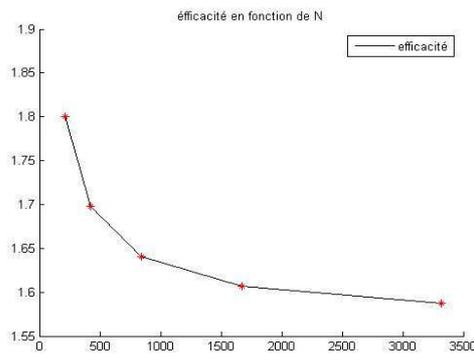


FIGURE 4.3 – courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.04$ et $f(x) = \exp(x)$

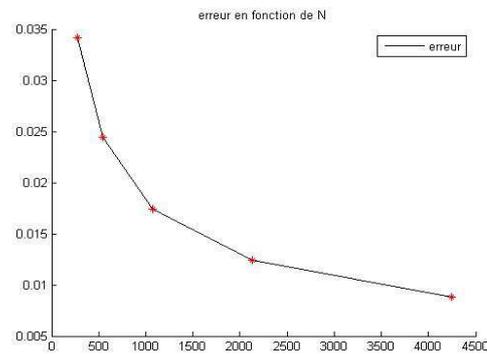
- $f(x) = (1 + x)\exp(x)$, le problème elliptique 1D s'écrit:

$$\begin{cases} -u''(x) = (1 + x)\exp(x) & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec, $u_{exacte}(x) = (1 - x)(\exp(x) - 1)$.

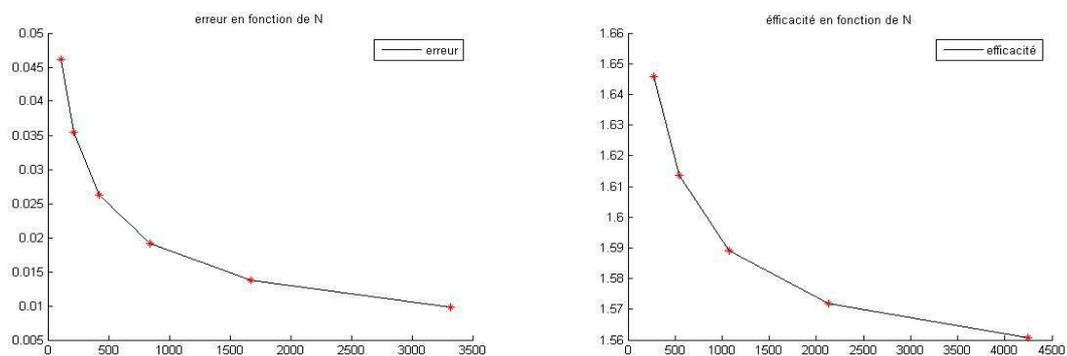


efficacité avec, $seuil=0.06$, $N=10pts$



efficacité avec, $seuil=0.06$, $N=100pts$

FIGURE 4.4 – courbes de l'efficacité pour $f(x) = (1 + x)\exp(x)$



erreur avec, seuil=0.06, N=10pts

erreur avec , seuil=0.06, N=100pts

FIGURE 4.5 – courbes de l'erreur pour $f(x) = (1+x)\exp(x)$

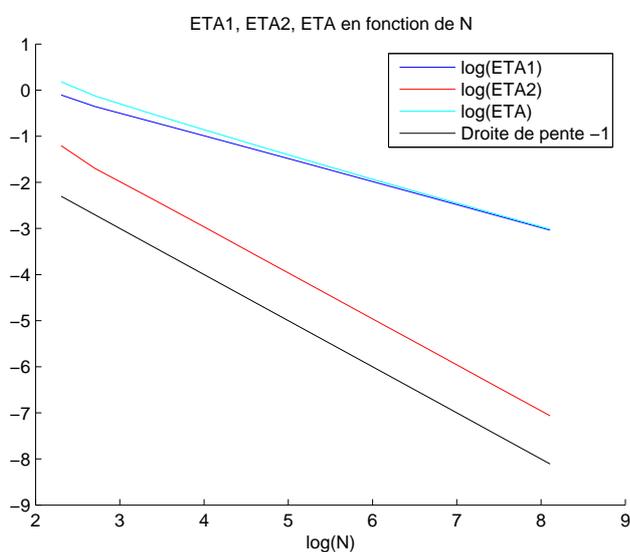
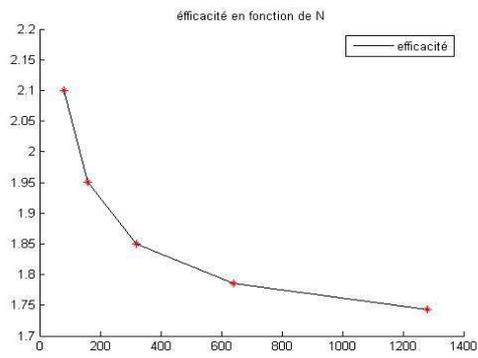


FIGURE 4.6 – courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.06$ et $f(x) = (1+x)\exp(x)$

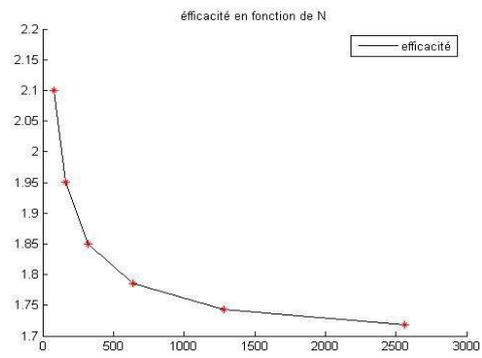
- $f(x) = \cos(x)$, le problème elliptique 1D s'écrit:

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos(x) & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

avec, $u_{exacte}(x) = \cos(x) + (1 - \cos(1))x - 1$.

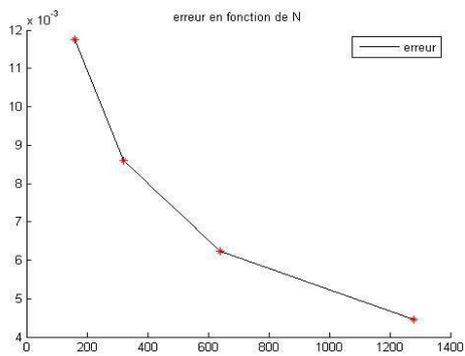


efficacité avec, seuil=0.03, N=10pts

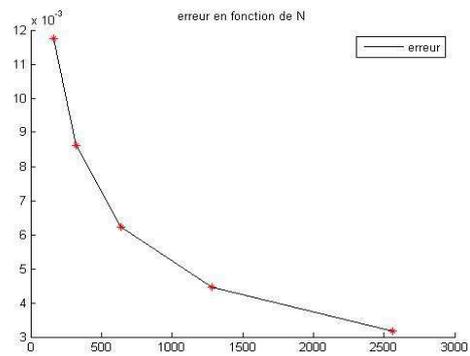


efficacité avec, seuil=0.02, N=10pts

FIGURE 4.7 – courbes de l'efficacité pour $f(x) = \cos(x)$



erreur avec, seuil=0.03, N=10pts



erreur avec, seuil=0.02, N=10pts

FIGURE 4.8 – courbes de l'erreur pour $f(x) = \cos(x)$

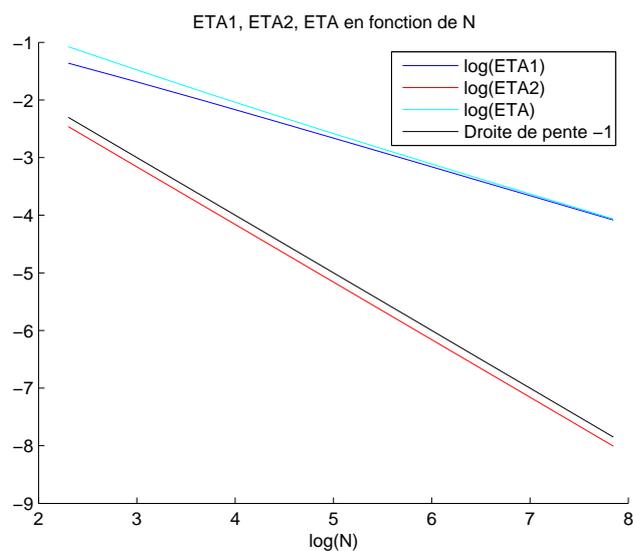


FIGURE 4.9 – courbe de $ETA1$, $ETA2$ et ETA pour $seuil = 0.02$ et $f(x) = \cos(x)$

Le but de ces exemples numériques est d'évaluer le comportement de l'erreur globale en norme $L^2(\Omega)$ et pour l'estimation de différents estimateurs η_j . Pour être utilisable dans un processus d'adaptation, il faut qu'un estimateur suive le même comportement (même convergence) que l'erreur. L'estimateur basé sur les résidus présente un très bon comportement en terme de convergence. Les indices d'efficacité pour l'estimateur développé sont très stables même s'ils ne sont pas toujours proches de l'unité.

Chapitre 5

Méthode de volumes finis centrée sur les noeuds(vertex centered)

Sommaire

5.1	Présentation du problème et discrétisation	57
5.2	Implémentation de la résolution du laplacien	60
5.3	Calcul du gradient	62
5.4	Implémentation du calcul du gradient	62
5.5	Résultats Numériques	63

5.1 Présentation du problème et discrétisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On cherche à résoudre l'équation:

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \tag{5.1}$$

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{5.2}$$

où f est une donnée du problème.

On discrétise Ω avec un maillage de triangles notés $T_k, 1 \leq k \leq \mathbb{N}_T$. On note $U(k)$ l'ensemble des triangles voisins du triangle T_k . On note $S_j, 1 \leq j \leq \mathbb{N}_S$ les sommets du maillage. Les inconnues u_j du problème sont associées aux sommets. On note $V(j)$ l'ensemble des triangles ayant S_j comme sommet avec $N_j = \text{card}(V(j))$. D_j désigne la cellule duale associée au sommet S_j définie comme sur la figure:

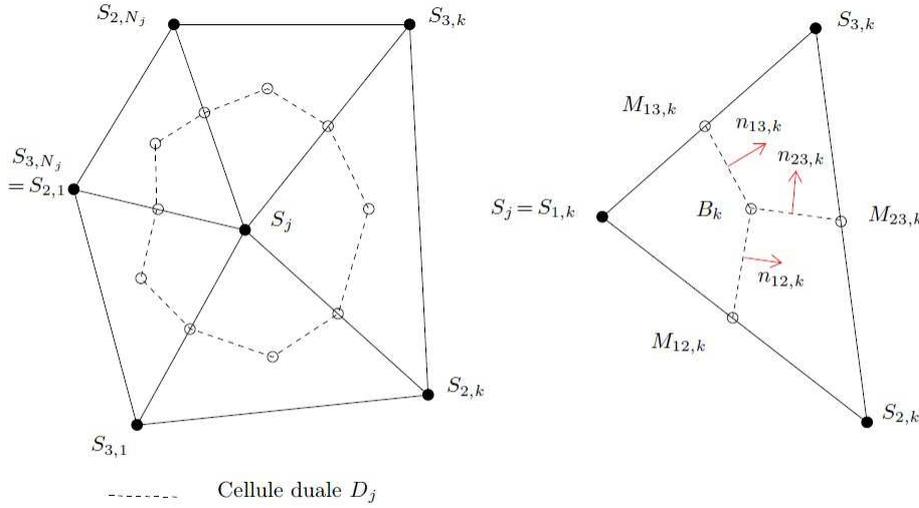


FIGURE 5.1 – Maillages primal et dual

B_k désigne le barycentre du trinagle k ; $M_{pq,k}$ désigne le milieu de l'arête $[S_{p,k}S_{q,k}]$.

$\vec{n}_{pq,k}$ est un vecteur unitaire tel que:

$$\vec{n}_{pq,k} \perp \overrightarrow{M_{pq,k}B_k} \text{ et } \vec{n}_{pq,k} \cdot \overrightarrow{S_{p,k}S_{q,k}} > 0$$

Pour obtenir le schéma aux volumes finis, on intègre l'équation (5.1) sur les cellules duales:

$$\begin{aligned} - \int_{D_j} \Delta u dV &= \int_{D_j} f dV \\ - \int_{\partial D_j} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{D_j} f dV \\ - \sum_{k \in V(j)} \int_{M_{12,k}B_k} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}_{12,k} d\sigma - \sum_{k \in V(j)} \int_{M_{13,k}B_k} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}_{13,k} d\sigma &= \int_{D_j} f dV \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dans le cas 1D, on utilise une différence finie pour approcher u' par les inconnues du problème. Plaçons nous dans le trinagle T_k . Pour alléger les notations, on renomme localement S_1, S_2, S_3 ses sommets et on note (x_j, y_j) les coordonnées de S_j . Pour approcher la quantité $\nabla u \cdot n$, on considère sur T_k la fonction polynomiale de degré 1 u^k qui vaut u_1 en S_1 , u_2 en S_2 , u_3 en S_3 . Sur chaque triangle T_k , u^k s'écrit donc sous la forme:

$$u^k(x, y) = ax + by + c$$

et on a:

$$u_1 = ax_1 + by_1 + c$$

$$u_2 = ax_2 + by_2 + c$$

$$u_3 = ax_3 + by_3 + c$$

Ce système de trois équations à trois inconnues nous permet donc d'avoir une formule analytique pour le gradient de u^k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^k}{\partial x} &= a = -\frac{u_1}{\gamma}(y_2 - y_3) + \frac{u_2}{\gamma}(y_1 - y_3) - \frac{u_3}{\gamma}(y_1 - y_2) \\ \frac{\partial u^k}{\partial y} &= b = u_1 \left(\frac{\gamma + (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)}{\gamma(y_1 - y_2)} \right) - u_2 \left(\frac{\gamma + (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)}{\gamma(y_1 - y_2)} \right) + u_3 \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma} \end{aligned}$$

où on a posé:

$$\gamma = (x_2 - x_3)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)$$

y_1 pouvant être égal à y_2 (si S_1 et S_2 sont sur le bord d'un carré par exemple), on choisira alors

$$b = u_1 \frac{(x_2 - x_2)}{\gamma} + u_2 \left(\frac{\gamma - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)} \right) + u_3 \left(\frac{-\gamma + (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)} \right)$$

On pose alors:

$$\alpha_1 = -\frac{(y_2 - y_3)}{\gamma}; \quad \alpha_2 = -\frac{(y_1 - y_3)}{\gamma}; \quad \alpha_3 = -\frac{(y_1 - y_2)}{\gamma} \quad (5.4)$$

et

$$\beta_1 = \frac{\gamma + (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)}{\gamma(y_1 - y_2)}; \quad \beta_2 = \frac{\gamma + (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)}{\gamma(y_1 - y_2)}; \quad \beta_3 = \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma} \quad \text{si } y_1 \neq y_2 \quad (5.5)$$

$$\beta_1 = \frac{(x_2 - x_2)}{\gamma}; \quad \beta_2 = \frac{\gamma - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)}; \quad \beta_3 = \frac{-\gamma + (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)} \quad \text{sinon} \quad (5.6)$$

Ainsi

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 \end{pmatrix}$$

Sur T_k , u^k étant $P1$, ∇u^k est constant. L'indice k renvoyant au triangle T_k , (5.3) s'écrit donc:

$$\int_{D_j} f dV = - \sum_{k \in V(j)} \int_{M_{12,k} B_k} \vec{\nabla} u^k \cdot \vec{n}_{12,k} d\sigma - \sum_{k \in V(j)} \int_{M_{13,k} B_k} \vec{\nabla} u^k \cdot \vec{n}_{13,k} d\sigma$$

$$\int_{D_j} f dV = - \sum_{k \in V(j)} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \cdot (\vec{n}_{12,k} \|M_{12,k} B_k\| + \vec{n}_{13,k} \|M_{13,k} B_k\|)$$

d'où, en posant $L_{pq,k} = \|M_{pq,k} B_k\|$ (longueur du segment) et $\vec{n}_{12,k} = (n_{12,k}^x, n_{12,k}^y)$:

$$\begin{aligned} \int_{D_j} f dV &= - \sum_{k \in V(j)} (\alpha_{1,k} u_{1,k} + \alpha_{2,k} u_{2,k} + \alpha_{3,k} u_{3,k}) (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) \\ &\quad - \sum_{k \in V(j)} (\beta_{1,k} u_{1,k} + \beta_{2,k} u_{2,k} + \beta_{3,k} u_{3,k}) (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k}) \end{aligned}$$

Voulant résoudre un système linéaire, on réécrit la dernière égalité sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_{D_j} f dV &= - \sum_{k \in V(j)} u_{1,k} \alpha_{1,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{1,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k}) \\
&- \sum_{k \in V(j)} u_{2,k} \alpha_{2,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{2,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k}) \\
&- \sum_{k \in V(j)} u_{3,k} \alpha_{3,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{3,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k}) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

L'égalité (8) nous permet donc de construire la matrice du système: chaque ligne de la matrice sera associée à un sommet S_j du maillage. A la j -ième ligne de la matrice, il y aura donc une contribution de tous les sommets des triangles dans $V(j)$.

La j -ème ligne du second membre sera égale à:

$$\int_{D_j} f dV = |D_j| f(x_j, y_j)$$

D'autres formules peuvent être utilisées pour interpoler l'intégrale de f sur D_j .

5.2 Implémentation de la résolution du laplacien

Pour n'avoir qu'une seule fois le gradient à calculer sur chaque triangle, une boucle sur les triangle sera faite plutôt qu'une boucle sur les sommets.

Algorithme 1

pour $i = 0$ à N (nombre de triangle)

(on renome localement S_1, S_2, S_3 les indices des sommets du triangle i)

calcul des coordonnées de M_{12}, M_{13}, M_{23} milieux respectifs de $[S_1 S_2], [S_1 S_3], [S_2 S_3]$;

calcul des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_{12,k}}, \overrightarrow{n_{13,k}}, \overrightarrow{n_{23,k}}$

calcul de $L_{12} = \|B_i M_{12}\|, L_{13} = \|B_i M_{13}\|, L_{23} = \|B_i M_{23}\|$;

s'écrit sous la forme $u(x, y) = ax + by + c$.

a et b s'écrivent $a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, b = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$

où les α_n, β_n sont donnés par (5.4), (5.5) et (5.6).

construction de la matrice de rigidité:

$$R(S_1, S_1) = \alpha_1(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_1(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})$$

$$R(S_1, S_2) = \alpha_2(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_2(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})$$

$$R(S_1, S_3) = \alpha_3(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_3(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})$$

$$R(S_2, S_1) = \alpha_1(n_{23}^x L_{23} - n_{12}^x L_{12}) + \beta_1(n_{23}^y L_{12} + n_{12}^y L_{12})$$

$$R(S_2, S_2) = \alpha_2(n_{23}^x L_{23} + n_{12}^x L_{12}) + \beta_2(n_{23}^y L_{12} - n_{12}^y L_{12})$$

$$R(S_2, S_3) = \alpha_3(n_{23}^x L_{23} + n_{12}^x L_{12}) + \beta_3(n_{23}^y L_{12} + n_{12}^y L_{12})$$

$$R(S_3, S_1) = \alpha_1(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_1(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})$$

$$R(S_3, S_2) = \alpha_2(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_2(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})$$

$$R(S_3, S_3) = \alpha_3(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_3(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})$$

calculde $area1$, $area2$, $area3$, aires respectives de $S_1M_{12}B_iM_{23}$, $S_2M_{23}B_iM_{23}$ et $S_3M_{13}B_iM_{23}$

construction d'un vecteur dont le coefficient j est égale à l'aire de D_j

$$A(S_1)+ = area1$$

$$A(S_2)+ = area2$$

$$A(S_3)+ = area3$$

fin pour

construction du second membre:

pour $i = 0$ à M (nombre de noeuds)

$$B(i) = A(i) \times f(x_i, y_i)$$

fin pour

5.3 Calcul du gradient

Dans le cadre de calcul d'estimateur d'erreur a posteriori, on cherche à calculer le saut du gradient sur chaque arête. Pour pouvoir tracer le "saut du gradient", on associe à chaque triangle la somme des sauts du gradient à chacune de ses arêtes.

Dans un premier temps, on calcule le gradient dans chaque triangle en utilisant les résultats de la première partie:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{\gamma}(y_2 - y_3) + \frac{u_2}{\gamma}(y_1 - y_3) - \frac{u_3}{\gamma}(y_1 - y_2) \\ u_1 \left(\frac{\gamma + (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)}{\gamma(y_1 - y_2)} \right) - u_2 \left(\frac{\gamma + (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)}{\gamma(y_1 - y_2)} \right) + u_3 \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ou, si $y_1 = y_2$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{\gamma}(y_2 - y_3) + \frac{u_2}{\gamma}(y_1 - y_3) - \frac{u_3}{\gamma}(y_1 - y_2) \\ u_1 \frac{(x_2 - x_3)}{\gamma} + u_2 \left(\frac{\gamma - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)} \right) + u_3 \left(\frac{-\gamma + (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)}{\gamma(y_2 - y_3)} \right) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Les u_j ont, cette fois, été calculés numériquement.

Puis on calcule pour chaque triangle la somme, noté SG , des sautes du gradient à chacune des aêtes, on a:

$$SG(i) = \sum_{s \in U(i)} |[\nabla u^i - \nabla u^s] \cdot \vec{n}_{is}|$$

où \vec{n}_{is} désigne le vecteur normale à la face commune entre les triangles i et s , extérieure au triangle i .

5.4 Implémentation du calcul du gradient

Algorithme 2

pour $i = 0$ à N (nombre de triangle)

(on renomme localement S_1, S_2, S_3 les indices des sommets du triangle i)

calcul du gradient dans le triangle i à l'aide des formules (5.3) et (5.9)

fin pour

pour $i = 0$ à N

(on renomme localement F_1, F_2, F_3 les indices des faces du triangle i)

(on renomme localement V_1, V_2, V_3 les indices des triangles voisins du triangle i , V_1 et i ont

comme arête commune ect)

si F_1 n'est pas sur le bord

$$SG(i)_+ = |[\nabla u^i - \nabla u^{V_1}] \cdot \vec{n}_{iV_1}|$$

fin si

si F_2 n'est pas sur le bord

$$SG(i)_+ = |[\nabla u^i - \nabla u^{V_2}] \cdot \vec{n}_{iV_2}|$$

fin si

si F_3 n'est pas sur le bord

$$SG(i)_+ = |[\nabla u^i - \nabla u^{V_3}] \cdot \vec{n}_{iV_3}|$$

fin si

fin pour

5.5 Résultats Numériques

On applique dans cette section les estimations d'erreur a posteriori et l'algorithme adaptatif présenté dans les sections précédentes.

On prend comme second membre la fonction $f(x, y) = \exp(-40(x - 0.5)^2 - 40(y - 0.5)^2)$.

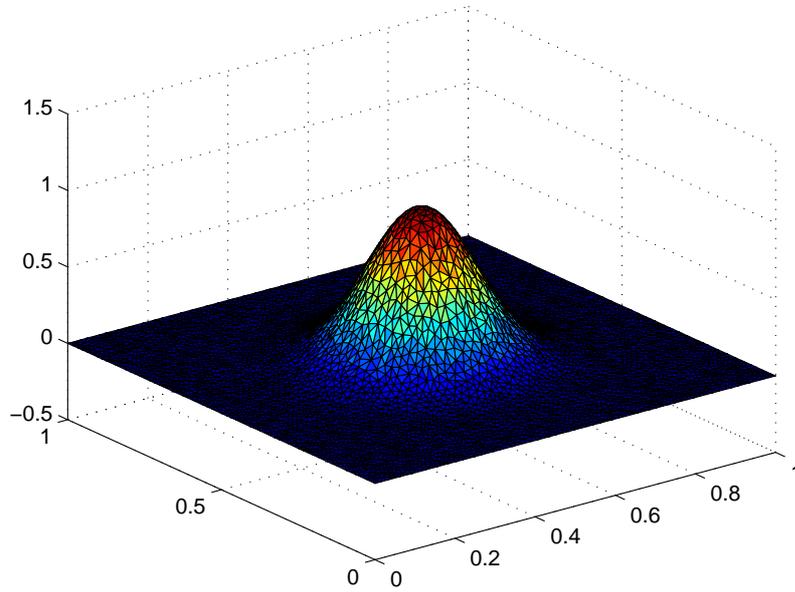


FIGURE 5.2 – courbe de la solution numérique, 3956 itérations

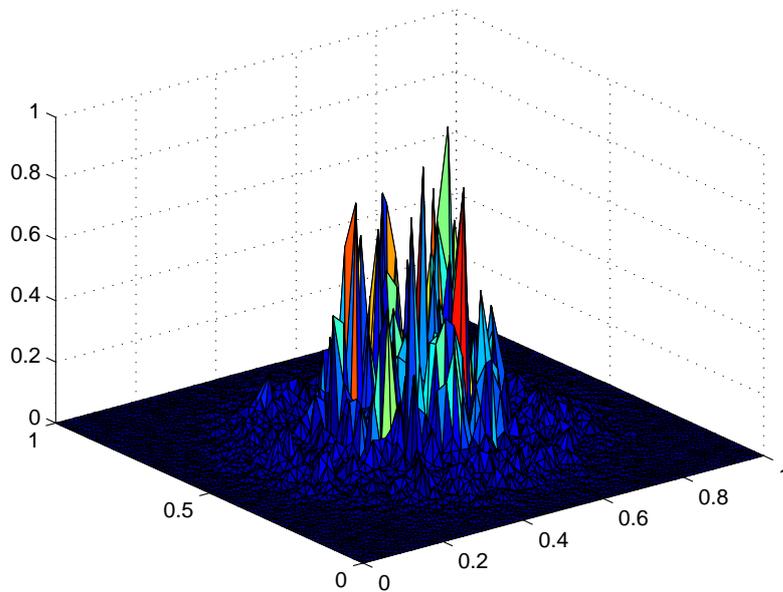
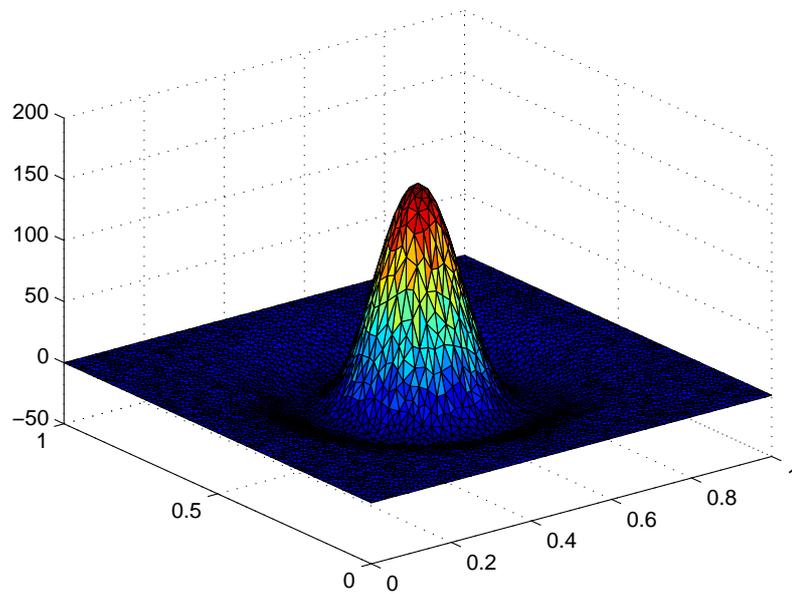
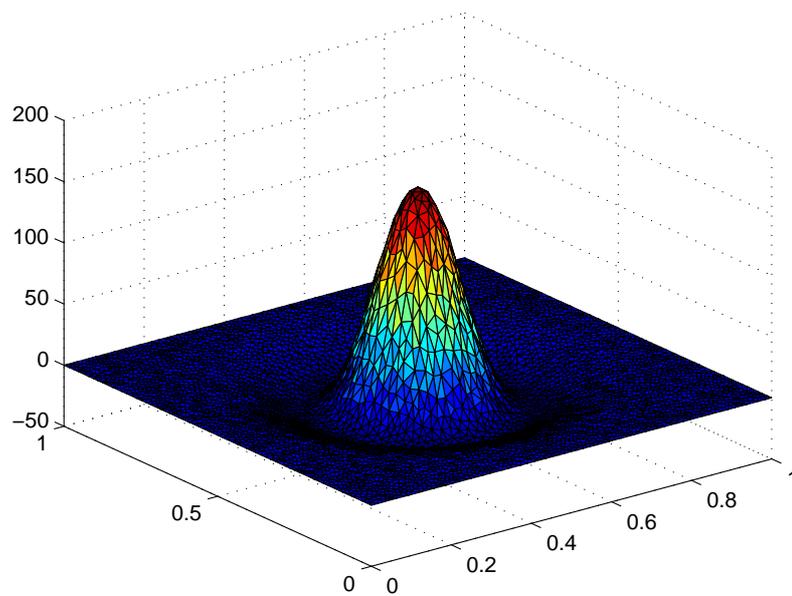


FIGURE 5.3 – courbe du residu, 3956 itérations

FIGURE 5.4 – courbe de la formule exacte de f , 3956 itérationsFIGURE 5.5 – courbe de la moyenne de f sur cellule d'integration, 3956 itérations

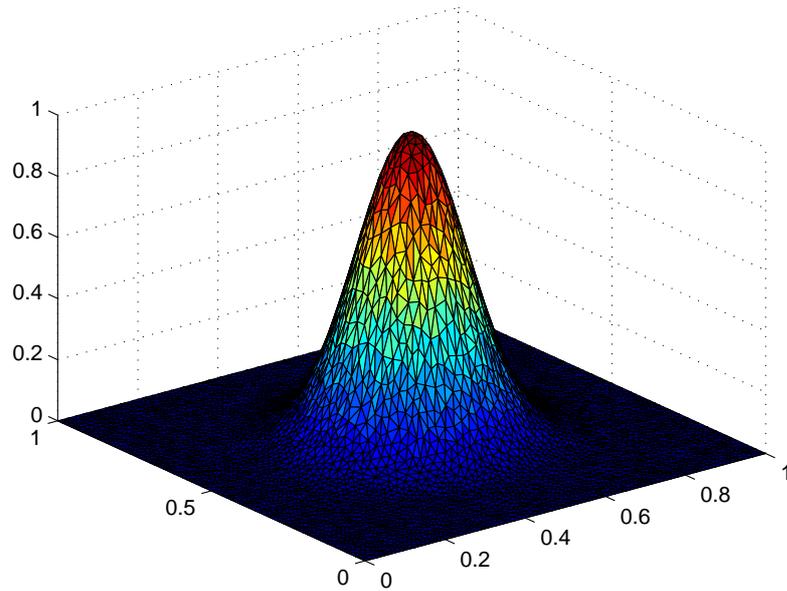


FIGURE 5.6 – courbe de la solution exacte, 3956 itérations

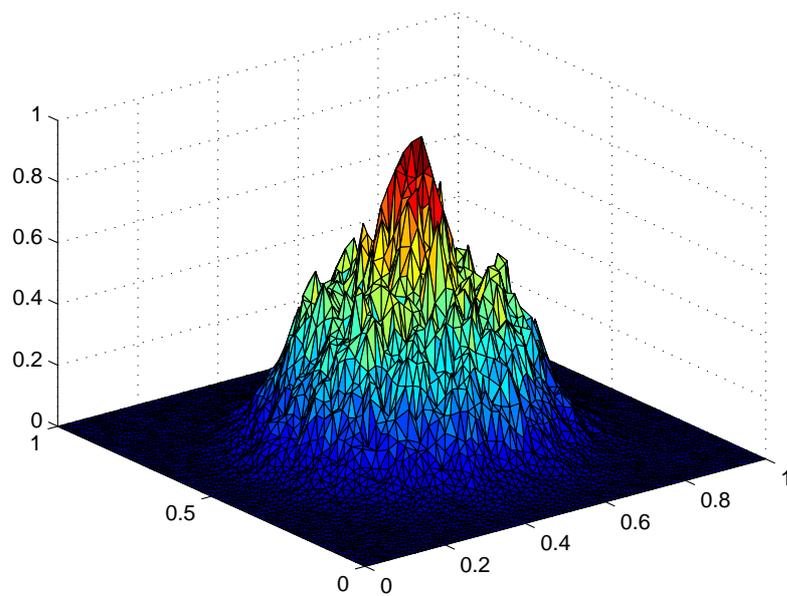
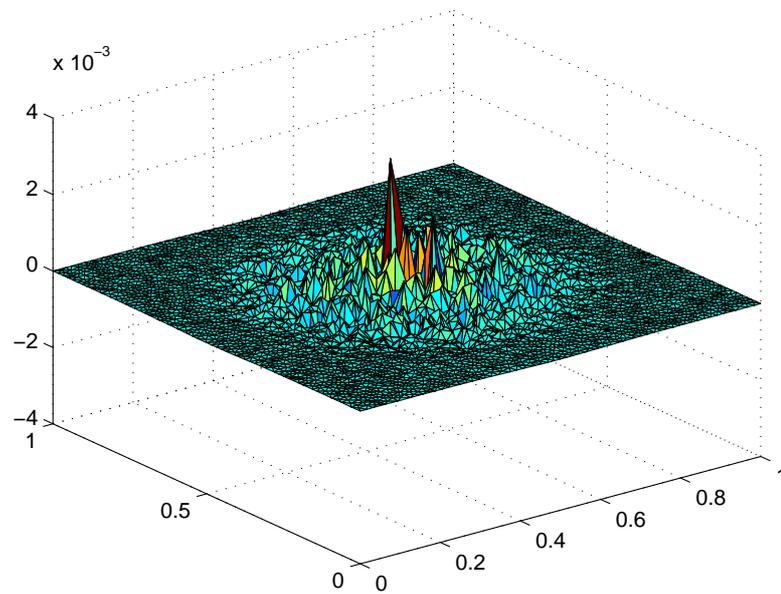


FIGURE 5.7 – courbe du saut de gradient, 3956 itérations

FIGURE 5.8 – courbe d'Erreur= $u - u_{\text{exact}}$, 3956 itérations

Conclusion et Perspectives

Cette étude a mis en évidence l'efficacité de la méthode de volumes finis, en particulier pour la simulation de problèmes issues de la mécanique de fluides: analyse et simulation monodimensionnel d'un modèle de couplage entre le modèle de Saint-Venant et un écoulement en milieu poreux. La simulation numérique des écoulements souterrains en milieu poreux ainsi que leur couplage avec les écoulements surfaciques qui un processus complexe régi par des lois physiques différentes, cette phénomène a un comportement propre et la compréhension de sa interaction est cruciale en hydrologie.

La modélisation des écoulements souterrains repose sur la conservation de la masse écrite sous forme différentielle ainsi que sur la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme algébrique (loi de Darcy). La connaissance du comportement hydrodynamique du sol (pression capillaire et perméabilité hydraulique...) est également nécessaire. De même, la modélisation des écoulements surfaciques repose sur la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement écrite sous forme différentielle.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'estimation d'erreur a posteriori pour les équations elliptiques discrétisée en espace par la méthode de volumes finis centrés par mailles et le schéma décentré en temps. Ces estimations, calculées dans la norme d'énergie. La solution du schéma volumes finis étant constante par morceaux, ces estimations consistent à la post-traiter localement. Ce post-traitement donne une solution polynômiale par morceaux en espace. L'erreur sera alors calculé par rapport à cette solution. La méthode des volumes finis étant localement conservative. Le but de nos estimations d'erreur a posteriori est double: permettre le contrôle global de l'erreur et fournir des indicateurs permettant le raffinement adaptatif en espace et en temps. Nous avons proposé un algorithme adaptatif basé sur ces estimations et présenter des essais numériques qui montrent l'efficacité de la stratégie adaptative.

La démarche ainsi proposée s'étend naturellement au cas bidimensionnel, et cela constitue pour nous une perspective.

Dans ce mémoire, nous faisons le point sur les différents opérateurs intervenant dans notre problème, le lien se fera lors d'une thèse.

Annexe A

Flux de Roe et Méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de systèmes linéaires

Sommaire

A.0.1 Méthode de Gauss-Seidel	72
---	----

D'abord on rappelle le flux de Roe, qu'on l'utilisera pour la résolution de schéma numérique:

$$\phi^{Roe}(U_L, U_R) = \frac{1}{2}(f_L + f_R) - \frac{1}{2} \cdot |a^*| U_R - U_L$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} f_R - f_L = a^*(U_R - U_L) \\ \phi^R(U_L, U_R) = \frac{1}{2}(a(U_L)U_R + a(U_L)U_L) - \frac{1}{2} \cdot |a^*|(U_R - U_L) \\ a^* = \frac{a(U_R)U_R - a(U_L)U_L}{U_R - U_L} \quad \text{si } U_R \neq U_L \\ a^* = a(U_L) \quad \text{si } U_R = U_L \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

A.0.1 Méthode de Gauss-Seidel

C'est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires $AX = y$ où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ qui est basé sur la décomposition (splitting en anglais) de la matrice A sous la forme: $A = M - N$, avec $M = D - E$ une matrice inversible, $N = F$.

Donc $A = D - E - F$, telque D une matrice diagonale, E matrice triangulaire inférieur et F matrice triangulaire supérieur

de sorte que l'itération $MX^{(k+1)} = NX^k + Y$ s'est à dire: $DX^{(k+1)} = EX^{(k+1)} + FX^{(k)} + Y$ à partir d'un vecteur $X^{(0)}$ on construit la suite $X_{k \geq 0}^{(k)}$ de la manière suivante:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Cette méthode n'est défini que si les a_{ii} sont non nuls la matrice $G = M^{-1}N = (D - E)^{-1}N$ s'appelle matrice de Gauss-Seidel. Le calcul de $x_i^{(k+1)}$ fait intervenir les valeurs des $x_j^{(k)}$ pour $j > i$ et de $x_j^{(k+1)}$ pour $j < i$ on fera donc le calcul de i allant de 1 à n .

Algorithme

Pour $i = 1$ à n faire

$$S \leftarrow y_i$$

Pour $j = 1$ à n faire

$$S \leftarrow S - a_{ij} * x_j$$

$$x_i \leftarrow x_i + \frac{S}{a_{ii}}$$

Gauss-Seidel sous forme Matricielle

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n \quad a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = y_i - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow (D - E)X^{k+1} = Y + FX^k$$

$$\Rightarrow X^{k+1} = (D - E)^{-1}FX^k + (D - E)^{-1}Y$$

$L = (D - E)^{-1}F$ est la matrice d'itération de Gauss-Seidel.

Exemple de Matrice du Système: Matrice du Laplacien en dimension 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A \text{ de taille } n \text{ qui discrétise l'opérateur } \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \text{ Ainsi on a:}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(y_1 + x_2^{(k)}) \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}(y_i + x_{i-1}^{(k+1)} + x_{i+1}^{(k)}) \quad i = 2n - 1 \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{2}(y_n + x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Dans la méthode de Gauss-Seidel, il faut avoir calculé $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ pour calculer x_i^{k+1}

Annexe B

Erreur de troncature

$$P(i+1) = P(i) + \Delta x P_x + \frac{\Delta x^2}{2} P_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} P_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} P_{xxxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$P(i-1) = P(i) - \Delta x P_x + \frac{\Delta x^2}{2} P_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} P_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} P_{xxxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$ET(\Delta x) = -P_{xx} - \frac{\Delta x^4}{12} P_{xxxx} - x(i) = \frac{-\Delta x^2}{12} P_{xxxx}$$

En générale on a:

$$E(\Delta x) = \lambda(\Delta x)^p \Rightarrow E\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^p$$

$$\Rightarrow \frac{E(\Delta x)}{E\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 2^p$$

$$\Rightarrow p = \frac{\log\left(\frac{E(\Delta x)}{E\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\right)}{\log 2}$$

$\Rightarrow p$ est l'ordre

Soit maintenant $\Delta x = \frac{\Delta x}{2}$

$$P(i+1) = P(i) + \frac{\Delta x}{2} P_x + \frac{\Delta x^2}{8} P_{xx} + \frac{\Delta x^3}{48} P_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{348} P_{xxxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$P(i-1) = P(i) - \frac{\Delta x}{2} P_x + \frac{\Delta x^2}{8} P_{xx} - \frac{\Delta x^3}{48} P_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{348} P_{xxxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$ET(\Delta x) = \frac{-P(i+1) + 2P(i) - P(i-1)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} - x(i)$$

$$ET(\Delta x) = -P_{xx} - \frac{\Delta x^2}{48}P_{xxxx} - x(i) \Rightarrow ET(\Delta x) = \frac{-\Delta x^2}{48}P_{xxxx}$$

Annexe C

Équivalence d'extremum dans L^2

On veut montrer l'égalité suivante:

$$A = \sup_{v \in H^1(T_i) \setminus \mathbb{R}} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2} = A' = \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 = 1} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2}$$

On rappelle que: $v = u - u_h$, où u est la solution exacte du problème (1.1), u_h est la solution numérique de la formulation éléments finis. On note v_h^* la fonction constante par morceaux égale à:

$$v_h(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx \text{ sur la cellule } T_i, \text{ pour } v_h \in V_h$$

avec:

$$V_h = \{w_h \in H_0^1(\Omega); \quad w_h|_{[x_i; x_{i+1}]} \in P1 \text{ et } w_h(0) = w_h(1) = 0\}$$

comme,

$$A = \sup_{v \in H^1(T_i) \setminus \mathbb{R}} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2}, \text{ et } A' = \sup_{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 = 1} \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2} \text{ " } \Rightarrow \text{ " } \text{ on a bien } A' \leq A$$

" \Leftarrow "

$$\text{soit: } \hat{v} = \frac{v}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}}, \quad \hat{v}_h^* = \frac{v_h^*}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}}$$

$$\text{donc on a: } \nabla \hat{v} = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}}, \text{ et } \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(T_i)} = 1$$

$$\text{Alors, } \frac{\|\hat{v} - \hat{v}_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla \hat{v}\|_{L^2(T_i)}^2} = \frac{\|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2}{\|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2}$$

Soit maintenant, $\hat{v} = \alpha v$, $\hat{v}_h^* = \alpha v_h^*$, et $\nabla \hat{v} = \alpha \nabla v$

$$\hat{v} - \hat{v}_h^* = \alpha(v - v_h^*)$$

$$\|\hat{v} - \hat{v}_h^*\|_{L^2(T_i)} = |\alpha| \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}$$

$$\|\nabla \hat{v}\|_{L^2(T_i)} = |\alpha| \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}$$

$A \leq A'$ ainsi, on a: $A = A'$.

Annexe D

Dérivé d'une norme dans L^2

on veut calculer la dérivée de G n(resp. la dérivée de H). D'abord, on rappelle les expressions de G (resp. de H):

$$G(v) = \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2, \quad H(v) = \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 - 1$$

d'une part on a:

$$\begin{aligned} G(v + \epsilon w) - G(v) &= \|v + \epsilon w - v_h^* - \epsilon w_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 - \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 \\ &= \|(v - v_h^*) + \epsilon(w - w_h^*)\|_{L^2(T_i)}^2 - \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 \\ &= \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 + 2\epsilon(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} + \epsilon^2\|w - w_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 - \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2 \end{aligned}$$

$$\text{ainsi, } G(v + \epsilon w) - G(v) = 2\epsilon(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)} + \epsilon^2\|w - w_h^*\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$\text{D'autre part on a: } G(v + \epsilon w) = G(v) + G'(v)(\epsilon w) + o(\epsilon^2)$$

$$\text{donc: } G(v + \epsilon w) - G(v) = G'(v)(\epsilon w) + o(\epsilon^2)$$

par identification on obtient:

$$G'(v).w = 2(v - v_h^*, w - w_h^*)_{L^2(T_i)}$$

de même on a:

$$H(v + \epsilon w) = \|\nabla(v + \epsilon w)\|_{L^2(T_i)}^2 = \|\nabla v + \epsilon \nabla w\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$= \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 + 2\epsilon(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} + \epsilon^2\|\nabla w\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$= H(v) + 2\epsilon(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} + \epsilon^2\|\nabla w\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$\text{alors, } H(v + \epsilon w) - H(v) = 2\epsilon(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)} + \epsilon^2\|\nabla w\|_{L^2(T_i)}^2$$

$$\text{d'autre part on a: } H(v + \epsilon w) - H(v) = H'(v)(\epsilon w) + o(\epsilon^2)$$

$$\text{par identification on obtient: } H'(v).w = 2(\nabla v, \nabla w)_{L^2(T_i)}$$

Annexe E

Équivalence d'extremum dans le cas monodimensionnel

On cherche dans le cas $1D$, l'équivalent du problème d'optimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup G(v) \\ \text{sous contrainte } H(v) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

avec: $G(v) = \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2$, $H(v) = \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 - 1$

Soit v^* tel que $G(v^*) = \sup G(v)$ avec $H(v) = 0$, alors il existe λ tel que si $T = G + \lambda H$, alors $T'(v^*) = G'(v^*) + \lambda H'(v^*) = 0$

donc v^* est un extremum de T comme $T(v^*) = G(v^*) + \lambda H(v^*) = G(v^*)$, par conséquence, on peut écrire l'équivalence suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher l'extremum de } G \text{ sous contrainte } H = 0 \\ \updownarrow \\ \text{chercher l'extremum } v^* \text{ de } T \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

On pose $G(v) = \frac{v^2}{2}$; $H(v) = v' \Rightarrow T(v) = G(v) + \lambda H(v) = \frac{v^2}{2} + \lambda v'$

$\Rightarrow T'(v) = v + \lambda v''$, alors $T'(v) = 0$ a pour solution v_k^* (voir annexe 4)

$v_k^*(x) = B \sin(k \pi x)$, $x \in [0, 1]$ $\Rightarrow v_k^{*2}(x) = B^2 \sin^2(k \pi x)$, $x \in [0, 1]$

alors on a: $\sup_k G(v_k^*) = \sup_k T(v_k^*) = \sup_k \frac{v_k^{*2}(x)}{2} = \sup_k \frac{B^2 \sin^2(k \pi x)}{2}$

est atteint est vaut $\frac{B^2}{2}$.

Annexe F

Résolution de l'équation $v + \lambda v'' = 0$

on considère l'équation différentielle de second ordre suivante: $v + \lambda v'' = 0$.

Moyennant un changement de variable on peut ramèner la résolution de l'équation $v + \lambda v'' = 0$ sur $]0, h[$, en effet:

On considère la fonction de $T_i : \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$

Soit le changement de variable $X = x + \frac{h}{2} \Leftrightarrow x = X - \frac{h}{2}$, alors:

$$v(x) = v\left(X - \frac{h}{2}\right) = \bar{v}(x) \text{ avec } \bar{v} :]0, h[\rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \bar{v}(X) = v\left(X - \frac{h}{2}\right)$$

de plus, $\bar{v}'(0) = v'(h) = 0$ et $\bar{v}'(h) = v'(0) = 0$

Revenons à la résolution de l'équation différentielle $v + \lambda v'' = 0$, qui a pour solution v qui s'écrit:

$$v(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ainsi, $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[-A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \right]$

en utilisant les conditions aux bords on obtient: $v'(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} B = 0 \Rightarrow B = 0$

$$v'(h) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} A \sin\left(\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = k \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{h^2}{k^2 \pi^2}$$

finallement, la solution v_k de l'équation différentielle s'écrit: $v_k(x) = A \cos\left(\frac{xk\pi}{h}\right)$.

Annexe G

Équivalence du problème d'optimisation dans le cas bidimensionnel

Dans le cas $2D$ pour avoir une équivalence du problème d'optimisation suivante:

$$\begin{cases} \sup G(v) \\ \text{sous contrainte } H(v) = 0 \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

avec: $G(v) = \|v - v_h^*\|_{L^2(T_i)}^2$, $H(v) = \|\nabla v\|_{L^2(T_i)}^2 - 1$.

On utilise la notion de multiplicateur de Lagrange, rappelons que le multiplicateur de Lagrange, est une méthode permettant de trouver les points stationnaires, (maximum, minimum...) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes. Cette technique permet de passer d'une question d'optimisation sous contrainte à une optimisation sans contrainte. Formellement, on note comme suit l'écriture de Lagrange, ou Lagrangien du problème:

$$L(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda\psi(x)$$

x variable de contrôle à maximiser ou à minimiser, $\varphi(x)$ la fonction à optimiser, $\psi(x)$ la contrainte et λ le multiplicateur de Lagrange.

ensuite, on propose de démontrer le théorème du multiplicateur de Lagrange, accessible dès que l'on dispose du théorème des fonctions implicites dans \mathbb{R}^2 .

Théorème G.1 (Théorème des fonctions implicites)

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction C^1 , $(a, b) \in U$ tel que: $f(a, b) = 0$.

On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Alors il existe:

- des voisinages ouverts I et J de a et b , une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ C^1

tels que: $\forall (x, y) \in U$ ($(x, y) \in I \times J$ et $f(x, y) = 0$) \Leftrightarrow ($x \in I$ et $y = \varphi(x)$) La relation $f(x, \varphi(x)) = 0$, donne:

$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Théorème G.2 (théorème du multiplicateur de Lagrange) Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 . On pose: $M = \{x \in U; g(x) = 0\}$ Soit $a \in M$ tel que $dg_a = 0$. Si $f|_M$ présente en a un extremum local, alors il existe un réel ν appelé multiplicateur de Lagrange, tel que $df_a = \nu dg_a$.

Preuve G.3 On choisit v dans \mathbb{R}^n tel que: $dg_a \cdot v \neq 0$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On pose: $\Omega = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; a + \lambda u + \mu v \in U\}$. Puisque U est ouvert de \mathbb{R}^n contenant a et $(\lambda, \mu) \rightarrow a + \lambda u + \mu v$ est continue sur \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$. Soit Ψ l'application $(\lambda, \mu) \rightarrow g(a + \lambda u + \mu v)$ de Ω dans \mathbb{R} . Ψ est C^1 sur Ω car composée de fonctions C^1 . De plus: $\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}(0, 0) = dg_a \cdot v \neq 0$ donc le théorème des fonctions implicites permet d'exprimer localement μ en fonction de λ : on choisit $\alpha > 0$ et $h :]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ C^1 tels que: $\forall \lambda \in]-\alpha, \alpha[$ $(\lambda, h(\lambda)) \in \Omega; h(0) = 0; \Psi(\lambda, h(\lambda)) = 0$ On considère alors l'application $F : \lambda \rightarrow f(a + \lambda u + h(\lambda)v)$ de $]-\alpha, \alpha[$ dans \mathbb{R} . On a déplacé le problème initiale vers un problème d'une seule variable. F est C^1 et présente un extremum local en 0 (intérieur à $]-\alpha, \alpha[$) donc: $F'(0) = 0$. Par ailleurs: $F'(0) = df_a \cdot (u + h'(0)v) = df_a \cdot (u - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(0, 0)}{\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}(0, 0)} v) = df_a \cdot (u - \frac{dg_a \cdot u}{dg_a \cdot v} v)$ donc $df_a \cdot u = df_a \cdot (\frac{dg_a \cdot u}{dg_a \cdot v} v) = \frac{df_a \cdot v}{dg_a \cdot v} dg_a \cdot u$. On a trouvé $\nu = \frac{df_a \cdot v}{dg_a \cdot v}$ indépendant de u tel que: $df_a \cdot u = \nu dg_a \cdot u$ d'où: $df_a = \nu dg_a$.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] M. Afif: Schémas Volumes Finis pour une Classe d'Equations de Type Convection-Diffusion Issues des Milieux Poreux. PhD thesis, UNIVERSITE CADI AYYAD MARRAKECH, 2002.
- [2] F. Benkhaldoun: Méthode des Volumes Finis, Cours UNIVERSITÉ Paris 13, 2010.
- [3] C. Bernardi: L'analyse a posteriori et ses applications, Laboratoire Jacques-Louis Lions, C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie,
- [4] C. Bernardi, B. Métivet, R. Verfürth Analyse numérique d'indicateurs d'erreur, dans Maillage et adaptation, édité par P.-L. George, Hermès (2001), 251-278,
<http://www.ann.jussieu.fr/hecht/ftp/Ecole-Cirm-EFEF5/Bernardi-Cours.pdf>
- [5] F. Boyer: Volumes finis pour la résolution de problèmes elliptiques hétérogènes anisotropes sur maillages généraux, Août 2008,
<http://www.latp.univ-mrs.fr/fboyer/exposes/Roscoff08.pdf>
- [6] C. Bernardi, R. Verfürth: A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations, Modél. Math. et Anal. Numér. 38 (2004), 437-455.
- [7] H. Darcy: Les fontaines publiques de la ville de Dijon ; exposition et application des principes dans les questions de distribution de l'eau. Victor Dalmont, Paris, 1856.
- [8] J. Droniou and R. Eymard: A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid. Numer. Math., 105 :35-71, 2006.
- [9] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin: A new finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on general grids : convergence analysis. C.R. Acad. Sci. Paris, 344(6) :403-406, 2007.
- [10] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin: Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of approximate gradient. Applied Numerical Mathematics, 37 :31-53, 2001.
- [11] E. Godlewski and P. A. Raviart: Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Applied Mathematical Sciences, Volume 118, Springer, (1996).
- [12] L. Gosse: A priori error estimate for a well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws, C.R.Acad.Sci.Paris Sér.I Math.327(1998), no.5, 467-472.

-
- [13] R. Herbin and Gallouët: Finite volume methods. In Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, pages. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [14] R. J. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics, ETH-Zurich, Birkhauser-Verlag, Basel, (1990). ISBN 3-7643-2464-3.
- [15] R. J. LeVeque: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002, Hardback : ISBN 0-521-81087-6, Paperback : ISBN 0-521-00924-3
- [16] A. MAHAMANE: Analyse et estimation d'erreur en volumes finis Application aux écoulements en milieu poreux et à l'adaptation de maillage. PhD thesis. UNIVERSITÉ PARIS 13, 2009.
- [17] P. Neittaanmäki, Sergey Repin: Reliable Methods For Computer Simulation, Error Control and A Posteriori Estimates, volume 33 of Studies in Mathematics and Its Applications. Elsevier, london, 2004.
- [18] P. Omnes: An introduction to finite volume schemes for elliptic equations, Cours UNIVERSITÉ Paris 13, November 26, 2011.
- [19] P. Omnes: Error estimates for a finite volume method for the Laplace equation in dimension one through discrete Green functions, **International Journal on Finite Volumes Volumes 6** (1), 18p., electronic only, 2009.
- [20] P. Omnes: Développement et analyse de méthodes de volumes finis, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, UNIVERSITÉ Paris 13, 04 Mai 2010.
- [21] P. Omnes: A posteriori error estimation and adaptive mesh refinement, (travaux dirigés), Université Paris 13, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications.
- [22] J. J. Stoker: Water waves , Interscience Publishers, New york, (1957),
- [23] J. J. Stoker Interscience Publishers, New york, (1957).
- [24] R. Verfürth: A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley and Teubner Mathematics (1996).
- [25] D. Yuan and L. Binliang: Modleling coastal ground and surface water interactions using an integrated approach, Hydrol Process., 23 (2009), pp. 2804-2817
- [26] B. Yuan, J. Sun and J. Tao: A finite volume model for coupling surface and subsurface flows, Procedia Engineering 31, (2012), pp 62-67.