

Objets combinatoires et invariants de fonctions lisses. Applications à la robotique

BENOIT Romain, DELANOUE Nicolas, LAGRANGE Sébastien, WENGER Philippe

16 décembre 2014

Singular curves and surfaces topology

Séminaire du 15 – 16 décembre 2014, IRCCyN, Nantes

Page web : <https://project.inria.fr/singcast/>

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme applicable à la robotique

exemple : Robot manipulateur 3R

Algorithme adapté à la robotique

Illustration graphique

Conclusions et compléments

Stratifications et Triangulations

Limites du contour apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de fonctions géométriques

Extension des triangulations : quadrilatation

Conclusions et perspectives

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Introduction

Motivation : Classifier les fonctions géométriques des robots

Fondation théorique : Classification de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

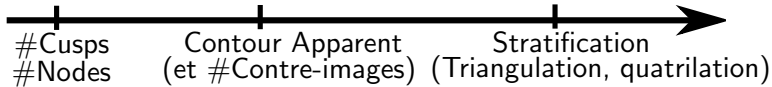


Figure: Progression d'invariants en invariants de plus en plus riches

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quatrilation

Conclusions et
perspectives

Introduction

Motivation : Classifier les fonctions géométriques des robots

Fondation théorique : Classification de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

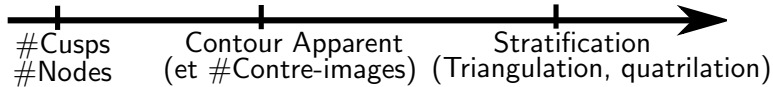


Figure: Progression d'invariants en invariants de plus en plus riches

[Contour apparent] – Algorithme (analyse par intervalles) :

- isole de façon garantie les cusps et nodes des fonctions géométriques $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ de robots
- encadre le lieu singulier, au cours de l'exécution

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quatrilation

Conclusions et
perspectives

Introduction

Motivation : Classifier les fonctions géométriques des robots

Fondation théorique : Classification de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

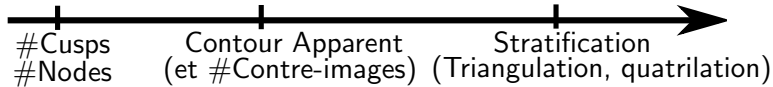


Figure: Progression d'invariants en invariants de plus en plus riches

[Contour apparent] – Algorithme (analyse par intervalles) :

- isole de façon garantie les cusps et nodes des fonctions géométriques $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ de robots
- encadre le lieu singulier, au cours de l'exécution

[Stratification/Triangulation] – Théorie et Construction :

- Stratification : objet topologique \rightarrow invariant
- Triangulation : objet combinatoire \rightarrow caractérisation

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quatrilation

Conclusions et
perspectives

Robot manipulateur 3R

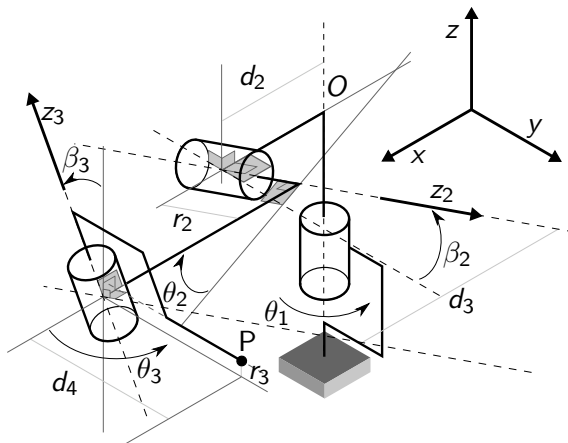


Figure: Schéma cinématique d'un robot 3R ($\theta_1 = 0$)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilat

Conclusions et
perspectives

Classifier un robot 3R selon $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

voir : "A classification of 3R orthogonal manipulators by the topology of their workspace" by *Baili, M., Wenger, P., Chablat, D.*

- fonction géométrique d'un robot 3R ($F : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)
décrite par $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (robot invariant selon l'axe z)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Classifier un robot 3R selon $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

voir : "A classification of 3R orthogonal manipulators by the topology of their workspace" by *Baili, M., Wenger, P., Chablat, D.*

- fonction géométrique d'un robot 3R ($F : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) décrite par $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (robot invariant selon l'axe z)
- Une première classification des robots 3R :
 - robots 3R à axes orthogonaux ($r_3 = 0$)
 - classification de f par $\#$ cusps et $\#$ nodes dans l'espace de travail
 - utilise des méthode formelles

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Classifier un robot 3R selon $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

voir : "A classification of 3R orthogonal manipulators by the topology of their workspace" by *Baili, M., Wenger, P., Chablat, D.*

- fonction géométrique d'un robot 3R ($F : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) décrite par $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (robot invariant selon l'axe z)
- Une première classification des robots 3R :
 - robots 3R à axes orthogonaux ($r_3 = 0$)
 - classification de f par $\#$ cusps et $\#$ nodes dans l'espace de travail
 - utilise des méthode formelles
- Notre contribution : Utilisation des méthodes d'analyse par intervalles :
 - cusps et nodes peuvent être isolées de façon garantie pour toute fonction f
 - long temps d'exécution de l'application littérale de l'algorithme théorique

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme théorique appliqué aux robots 3R

Recherche des cusps sur $[-\pi, \pi]^2$: rapide \rightarrow conservée

Recherche des nodes sur $[-\pi, \pi]^4$: très lente \rightarrow adaptation

Temps de calculs de l'ordre du mois

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

**Algorithme adapté à
la robotique**

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme théorique appliqué aux robots 3R

Recherche des cusps sur $[-\pi, \pi]^2$: rapide \rightarrow conservée

Recherche des nodes sur $[-\pi, \pi]^4$: très lente \rightarrow adaptation

Temps de calculs de l'ordre du mois

Causes :

- Expressions complexes de f et de ses différentielles \Rightarrow nombreuses subdivisions et longs temps d'évaluations
- Recherche dans $[-\pi, \pi]^4$ (espace de dimension 4)
- gestion du voisinage de $\Delta[-\pi, \pi]^4$

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme théorique appliqué aux robots 3R

Recherche des cusps sur $[-\pi, \pi]^2$: rapide \rightarrow conservée

Recherche des nodes sur $[-\pi, \pi]^4$: très lente \rightarrow adaptation

Temps de calculs de l'ordre du mois

Causes :

- Expressions complexes de f et de ses différentielles \Rightarrow nombreuses subdivisions et longs temps d'évaluations
- Recherche dans $[-\pi, \pi]^4$ (espace de dimension 4)
- gestion du voisinage de $\Delta[-\pi, \pi]^4$

Adaptation en scindant la recherche de nodes en 2 étapes :

1. pré-construction d'une liste de recherche avec :
 - Gestion du voisinage de $\Delta[-\pi, \pi]^4$
 - Recherche des nodes près de $S_{f_r} \times S_{f_r}$
2. Recherche de nodes dans la liste pré-construite

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme adapté

Algorithme en 3 étapes :

1. Recherche des cusps (Newton par intervalles)
2. Construction d'un recouvrement, R , de S_f en 2 étapes :
 - Injectivité : $\forall G \in R, f|_{S_f \cap G}$ est injective
 - Gestion de la diagonale :
 $\forall (G, D) \in R^2 \mid G \cap D \neq \emptyset, f|_{S_f \cap (G \cup D)}$ est injective
3. Recherche des nodes dans chaque élément de $\{G \times D \mid (G, D) \in R^2; G \cap D = \emptyset\}$

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

**Algorithme adapté à
la robotique**

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme adapté

Algorithme en 3 étapes :

1. Recherche des cusps (Newton par intervalles)
2. Construction d'un recouvrement, R , de S_f en 2 étapes :
 - Injectivité : $\forall G \in R, f|_{S_f \cap G}$ est injective
 - Gestion de la diagonale :
 $\forall (G, D) \in R^2 \mid G \cap D \neq \emptyset, f|_{S_f \cap (G \cup D)}$ est injective
3. Recherche des nodes dans chaque élément de $\{G \times D \mid (G, D) \in R^2; G \cap D = \emptyset\}$

Remarque

La seconde étape retourne un recouvrement garanti de S_f

Recouvrement R construit, en pratique, en 2 sous étapes :

- *construction de R_0 tel que $\forall G \in R_0, f|_{S_f \cap G}$ est injective*
- *subdiviser chaque $G \in R_0$ pour obtenir les boites de R (supprimer les sous-boites créées n'intersectant pas S_f)*

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Recouvrement R de S_f

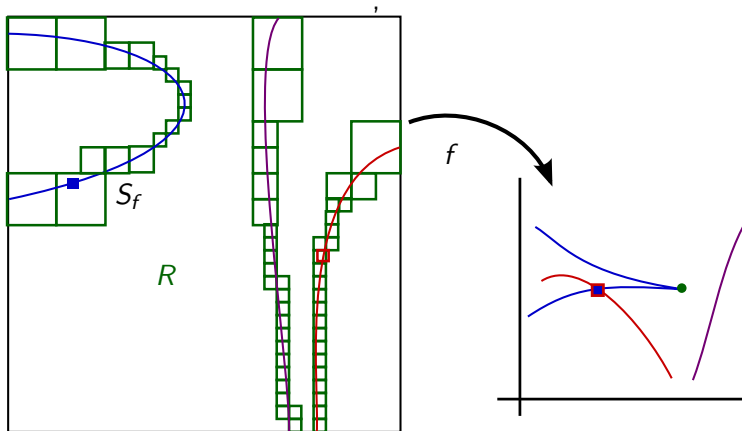


Figure: Recouvrement R , de S_f , vérifiant :
 $\forall (G, D) \in R^2 \mid G \cap D \neq \emptyset$, la fonction $f|_{S_f \cap (G \cup D)}$ est injective

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Recherche des nodes "le long de R"

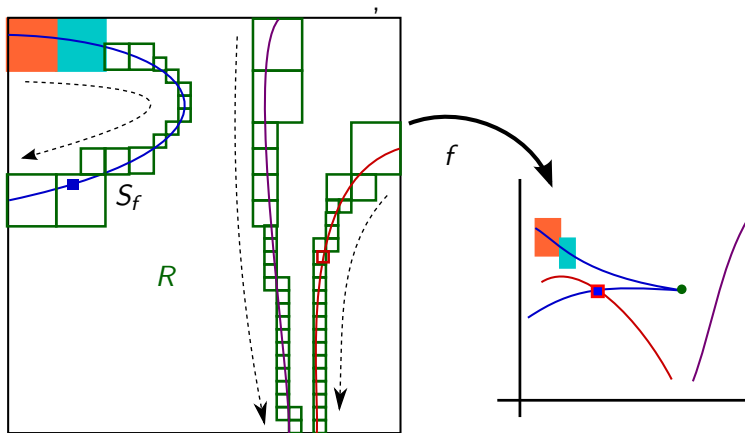


Figure: [1/5] Recherche des nodes dans $\{\{G, D\} \mid G \cap D = \emptyset\}$

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilat

Conclusions et
perspectives

Recherche des nodes "le long de R"

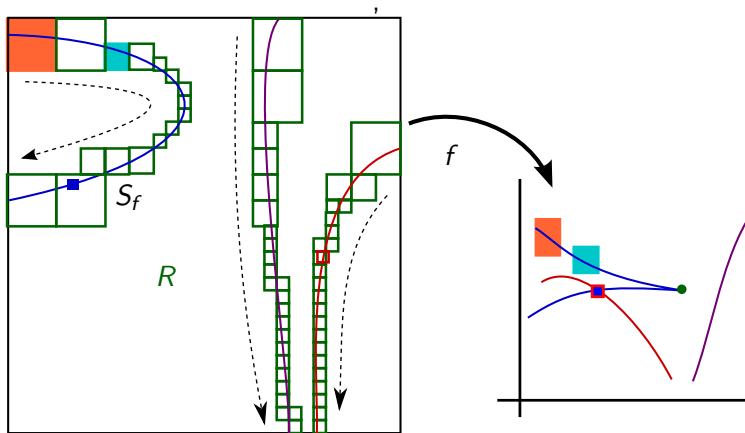


Figure: [2/5] Recherche des nodes : images disjointes

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Recherche des nodes "le long de R"

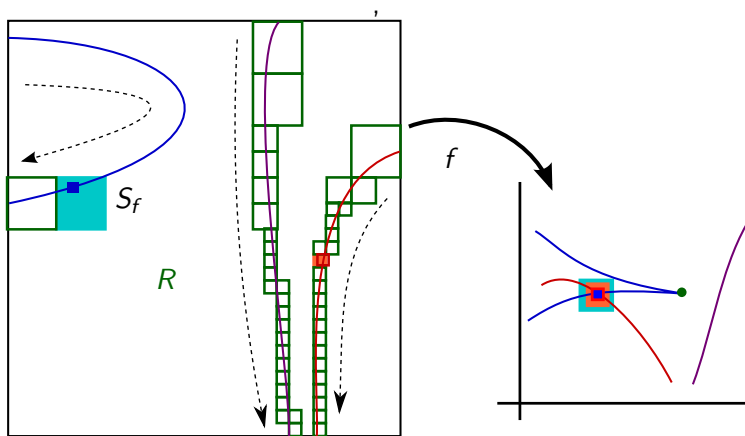


Figure: [3/5] Recherche des nodes : détecter un node (1/2)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Recherche des nodes "le long de R"

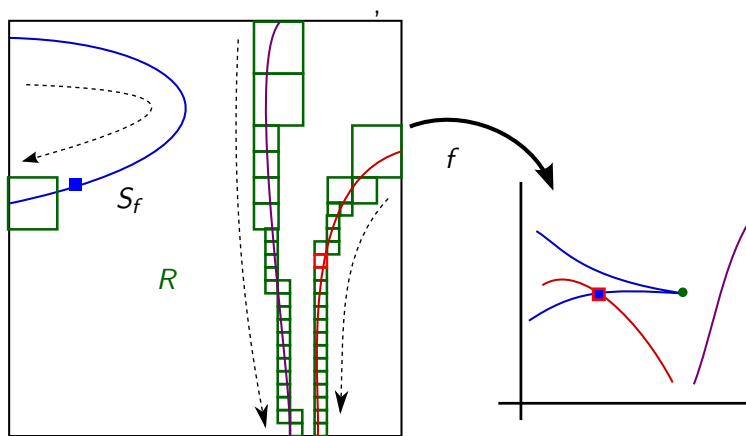


Figure: [4/5] Recherche des nodes : détecter un node (2/2)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Performances :

Points positifs (3R orthogonal/3R général) :

- cusps rapidement isolés (~ 1 min/ ~ 50 min)
- Construction plutôt rapide des recouvrements R_0 et R (~ 10 min/ ~ 7 heures)
- Détection rapide des nodes (~ 5 min/ ~ 10 heures)

Points négatifs (3R orthogonal/3R général) :

- Longue vérification de l'absence de node près des cusps (~ 45 min/ ~ 60 heures)

Temps de vérification réduit par l'utilisation de méthodes de *propagation de contraintes* (bibliothèque Ibex)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R
Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent
Stratifications
Triangulations
Triangulations de
fonctions
géométriques
Extension des
triangulations :
quadrilatation
Conclusions et
perspectives

Conclusions–Contribution

- ▶ Encadrement garanti des cusps et des nodes d'une fonction géométrique $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ à l'aide de l'analyse par intervalles (lorsque f est *générique*)
- ▶ Possibilité d'encadrer le contour apparent, à l'aide du recouvrement de S_f construit.
- ▶ Possibilité d'avoir une imprécision sur les paramètres.
- ▶ Possibilité de prendre en compte des contraintes
 - articulaires
 - dans l'espace de travail (ex : auto-collisions)

L'algorithme SIVIA (algorithme classique d'inversion ensembliste) utilisé est compatible avec notre procédure de recherche de cusps et de nodes

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

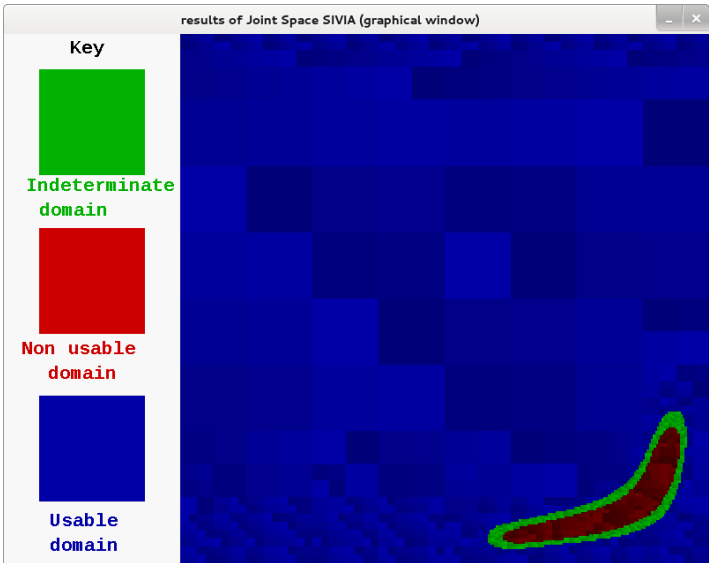


Figure: Auto-collisions pour un robot 3R orthogonal de paramètres géométriques $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = 1.5$, $r_2 = 0.5$ et $r_3 = 0.5$ (solides oblongs de rayon 0.1 et liaisons pivots de rayon 0.2)

Objets combinatoires et invariants de fonctions lisses. Applications à la robotique

BENOIT R.,
 DELANOUE N.,
 LAGRANGE S.,
 WENGER P.

Algorithme applicable à la robotique

exemple : Robot manipulateur 3R

Algorithme adapté à la robotique

Illustration graphique

Conclusions et compléments

Stratifications et Triangulations

Limites du contour apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de fonctions géométriques

Extension des triangulations : quadrilatation

Conclusions et perspectives

Algorithme applicable à la robotique

exemple : Robot manipulateur 3R

Algorithme adapté à la robotique

Illustration graphique

Conclusions et compléments

Stratifications et Triangulations

Limites du contour apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de fonctions géométriques

Extension des triangulations : quadrilatation

Conclusions et perspectives

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Limites du contour apparent

exemple fourni par Michel COSTE

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow CA(f_1) = CA(f_2)$$

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

**Limites du contour
apparent**

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Limites du contour apparent

exemple fourni par Michel COSTE

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow CA(f_1) = CA(f_2)$$

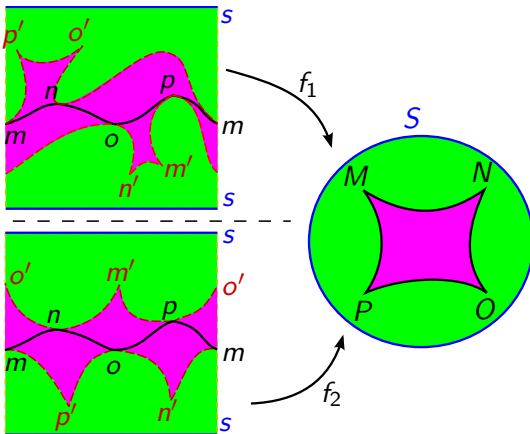


Figure: Importance des contres images

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Stratifications

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Stratification de Thom Boardman : Invariant

Objets constituant les stratifications peuvent être de topologies compliquées.

Notre objectif : Avoir une application *simpliciale*, c_f , entre objets combinatoires qui caractérise $f \in C^\infty(E, F)$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

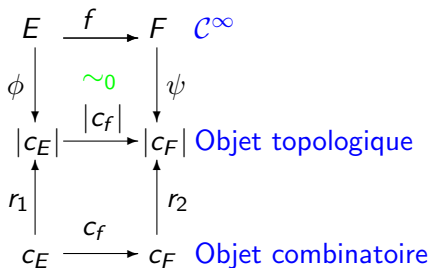


Figure: Diagramme commutatif des objets caractérisant f

- ▶ $f \in C^\infty(E, F)$,
- ▶ $\phi : E \rightarrow |E|$ et $\psi : F \rightarrow |F|$, des homéomorphismes
- ▶ r_1 et r_2 des réalisations,
- ▶ $C_f : C_E \rightarrow C_F$ une application entre objets combinatoires de réalisations *topologiquement simples*.

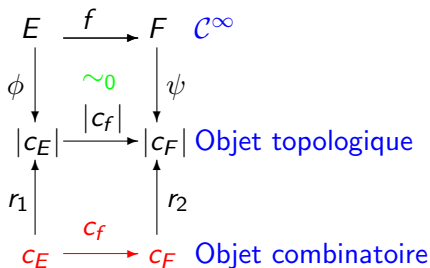


Figure: Diagramme commutatif des objets caractérisant f

- ▶ $f \in \mathcal{C}^\infty(E, F)$,
- ▶ $\phi : E \rightarrow |E|$ et $\psi : F \rightarrow |F|$, des homéomorphismes
- ▶ r_1 et r_2 des réalisations,
- ▶ $C_f : C_E \rightarrow C_F$ une application entre objets combinatoires de réalisations *topologiquement simples*.

Premier objet combinatoire : Triangulation

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Définition (Triangulation)

Une triangulation, T , est une liste de n -uplets de symboles, tels que : $\forall t \in T, \forall t_0 \subset t, t_0 \in T$

Définition (Symboles de la triangulation T)

$$sy(T) = \{s \mid \exists t \in T, s \in t\}$$

Définition (Application de T_1 dans T_2)

Une application $g : T_1 \rightarrow T_2$ telle que :

$$\exists g_{sy} : sy(T_1) \rightarrow sy(T_2) \text{ et } \forall t \in T_1, g(t) = \{g_{sy}(s) \mid s \in t\}$$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R
Algorithme adapté à
la robotique
Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent
Stratifications
Triangulations
Triangulations de
fonctions
géométriques
Extension des
triangulations :
quadrilatation
Conclusions et
perspectives

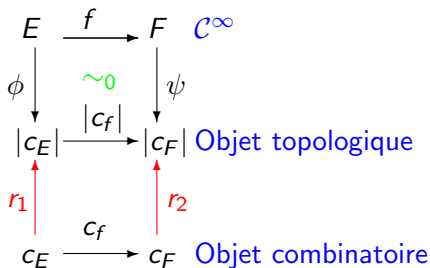


Figure: Diagramme commutatif des objets caractérisant f

- ▶ $f \in C^\infty(E, F)$,
- ▶ $\phi : E \rightarrow |E|$ et $\psi : F \rightarrow |F|$, des homéomorphismes
- ▶ r_1 et r_2 des réalisations,
- ▶ $c_f : C_E \rightarrow C_F$ une application entre objets combinatoires de réalisations *topologiquement simples*.

Réalisation de triangulation

Définition (Réalisation d'une triangulation T)

Objet géométrique $|T| \subset \mathbb{R}^n$ formé de simplexes tels que l'ensemble des n -uplets de points sommets d'un simplexe de $|T|$ est en bijection avec T .

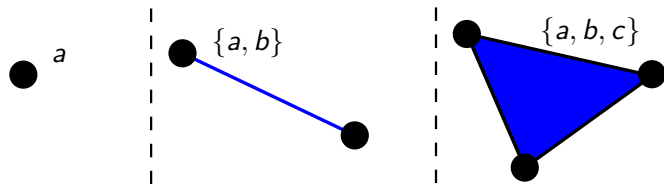


Figure: Réalisations dans \mathbb{R}^2 des n -uplets combinatoires

Théorème (Homéomorphisme des réalisations)

Les réalisations d'une triangulation sont homéomorphes

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

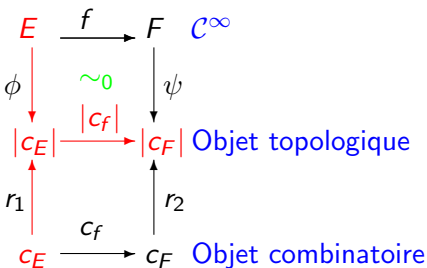


Figure: Diagramme commutatif des objets caractérisant f

- ▶ $f \in C^\infty(E, F)$,
- ▶ $\phi : E \rightarrow |E|$ et $\psi : F \rightarrow |F|$, des homéomorphismes
- ▶ r_1 et r_2 des réalisations,
- ▶ $C_f : C_E \rightarrow C_F$ une application entre objets combinatoires de réalisations *topologiquement simples*.

Définition (Triangulation de l'espace E)

Une triangulation, T_E , telle que $|T_E|$ est homéomorphe à E .

Définition (Application de $|T_E|$ dans $|T_F|$)

Une application $|g| : |T_E| \rightarrow |T_F|$ telle que $\exists g : T_E \rightarrow T_F$ et $\forall |\sigma|$, simplexe de $|T_E|$, $|g|(|\sigma|) = |g(\sigma)|$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

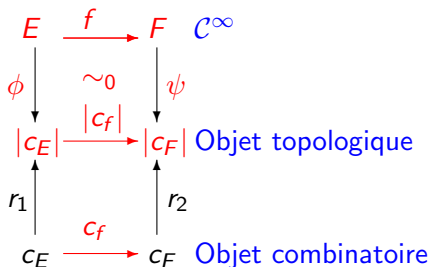


Figure: Diagramme commutatif des objets caractérisant f

- ▶ $f \in \mathcal{C}^\infty(E, F)$,
- ▶ $\phi : E \rightarrow |E|$ et $\psi : F \rightarrow |F|$, des homéomorphismes
- ▶ r_1 et r_2 des réalisations,
- ▶ $C_f : C_E \rightarrow C_F$ une application entre objets combinatoires de réalisations *topologiquement simples*.

Définition (Équivalence topologique \sim_0)

Deux applications, $f_1 : E \rightarrow F$ et $f_2 : X \rightarrow Y$, sont topologiquement conjuguées, noté $f_1 \sim_0 f_2$ ssi il existe des homéomorphismes $\phi : E \rightarrow X$ et $\psi : F \rightarrow Y$ tels que

$$f_1 = \psi^{-1} \circ f_2 \circ \phi$$

Définition (Triangulation de l'application $f \in C^\infty(E, F)$)

une application $g : T_E \rightarrow T_F$ telle que $|g| \sim_0 f$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Triangulations de fonctions géométriques

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Illustrations : fonctions géométriques de robots 3R

Méthodologie :

- Soit f , une fonction géométrique de E dans F
- Isoler les composantes connexes délimitées par :
 - $f(S_f)$ dans F
 - $f^{-1}(f(S_f))$ dans E
- Définir une triangulation pour chaque composante connexe délimitée, afin de construire T_E et T_F , telles que l'on puisse définir $T_f : T_E \rightarrow T_F$.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

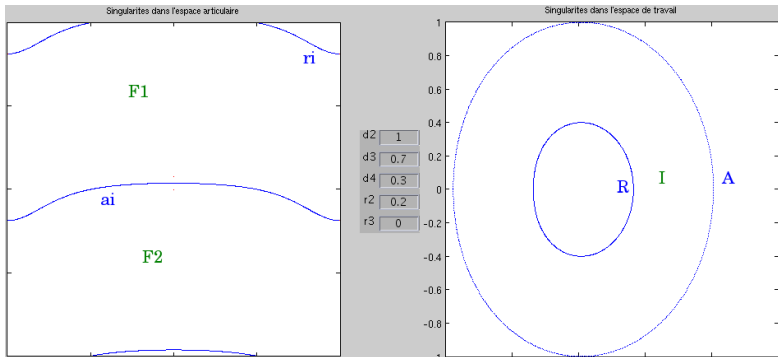


Figure: $f_1 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: "Un tore vu de dessus (ou de dessous)"

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

**Triangulations de
fonctions
géométriques**

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

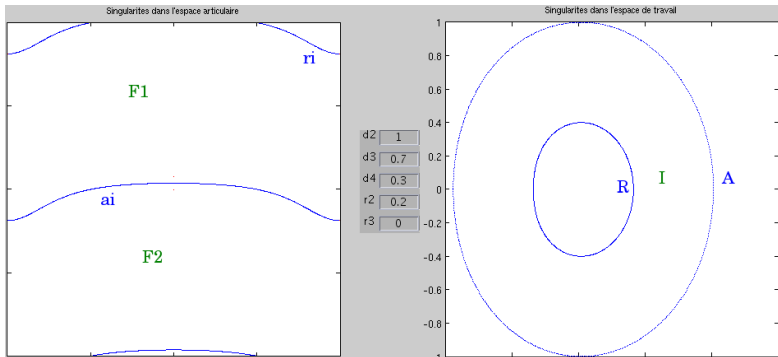
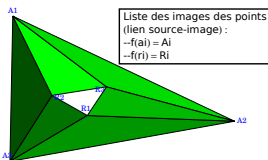
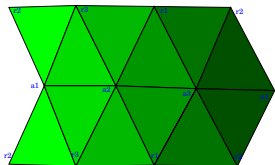
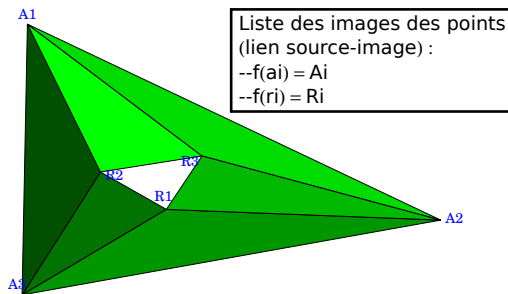
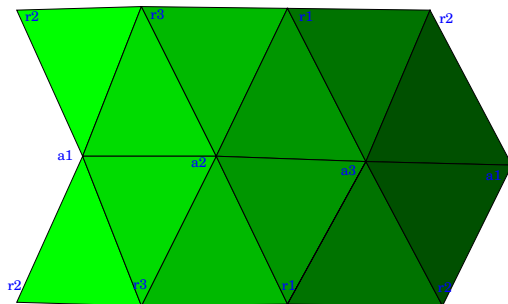


Figure: $f_1 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: "Un tore vu de dessus (ou de dessous)"





Liste des images des points
(lien source-image) :
-- $f(a_i) = A_i$
-- $f(r_i) = R_i$

Figure: Triangulation de f_1

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

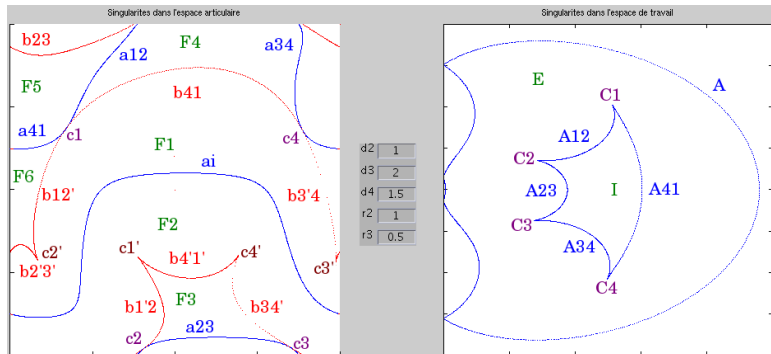


Figure: $f_2 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

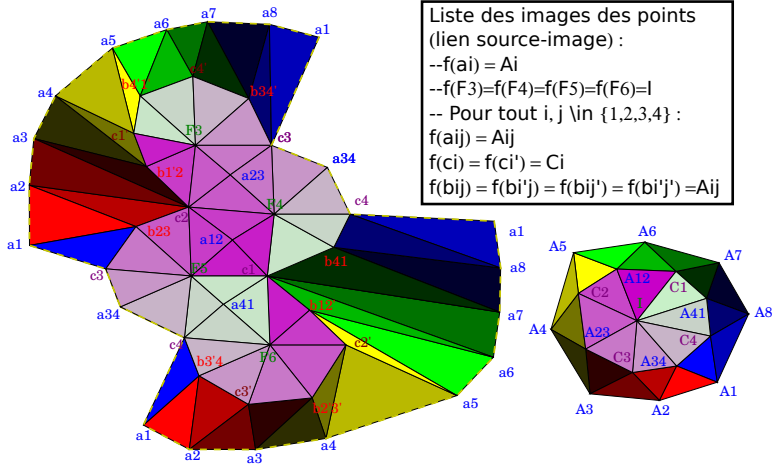


Figure: Triangulation de f_2

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

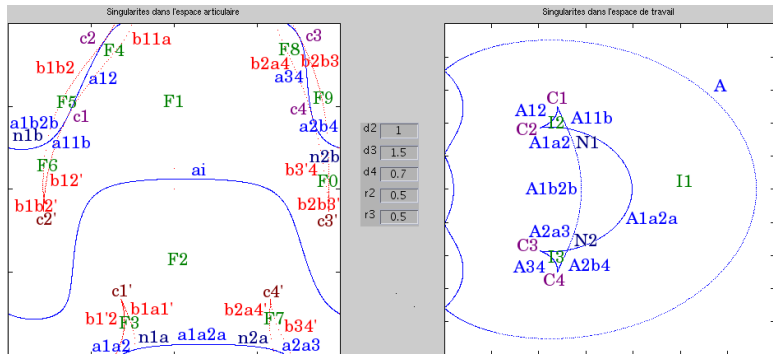


Figure: $f_3 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications
Triangulations

**Triangulations de
fonctions
géométriques**

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

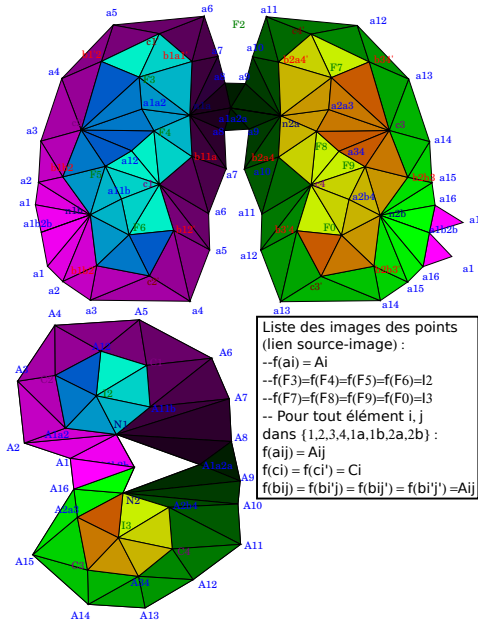


Figure: Triangulation de f_{r3}

Conjecture

Toute application générique, de X dans Y tels que $\dim(X) = \dim(Y) = 2$ est triangulable

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

**Triangulations de
fonctions
géométriques**

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Conjecture

Toute application générique, de X dans Y tels que $\dim(X) = \dim(Y) = 2$ est triangulable

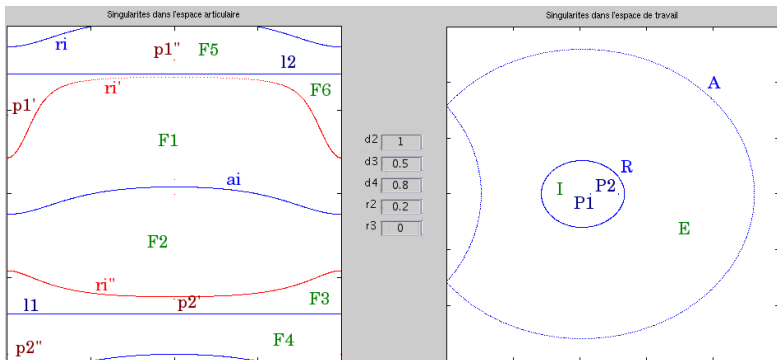


Figure: Certaines fonctions géométriques présentent des *mouvements internes*.

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Mouvement internes et éclatements

Remarque

La fonction géométrique f est assimilable à un éclatement, au voisinage de ses mouvements internes.

Théorème

Il n'est pas possible de trianguler un éclatement.

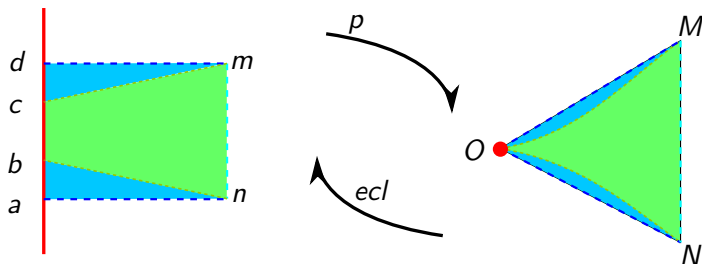


Figure: Eclatement ecl et $p : (x, y) \mapsto (x, xy)$

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Extension des triangulations : quadrilatation

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

On propose d'ajouter un objet aux triangulation : le *carré*
(4-uplet de symboles)

Définition (Quadrilatation)

Liste, Q , de n -uplets de symboles où $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tels que
 $\forall q \in Q, \forall q_0 \subset q$, tel que $\#q_0 \leq 2, q_0 \in Q$

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

**Extension des
triangulations :
quadrilatation**

Conclusions et
perspectives

Réalisations et applications entre quadrilatations

Définition (Réalisation d'une quadrilatation)

La définition reste la même que pour une triangulation excepté qu'un 4-uplet est réalisé par un quadrilatère (plan) au lieu de l'être par un simplexe.

Définition (Application entre quadrilatations)

Même définition que pour les triangulations

Définition (Application entre réalisations de quadrilatations)

*Une application $|g| : |Q_1| \rightarrow |Q_2|$, entre réalisations de quadrilatations, se définit de la même manière que pour une application entre triangulations excepté dans le cas suivant :
Soit $|g|_{|\sigma_1} : \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ où σ_1 est un carré et σ_2 est un triangle.
Alors $|g| \sim p : (x, y) \mapsto (x, xy)$*

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique

Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quadrilatation

Conclusions et
perspectives

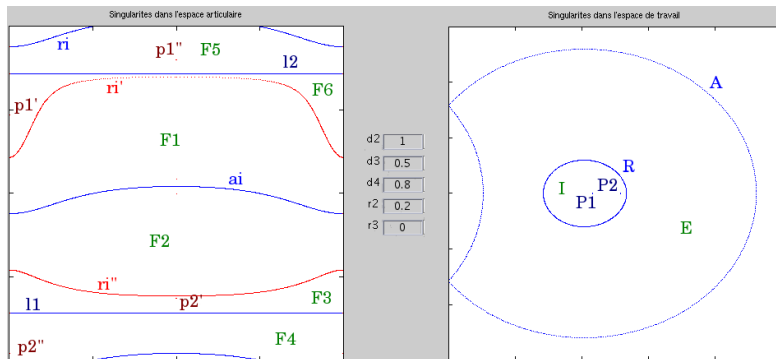
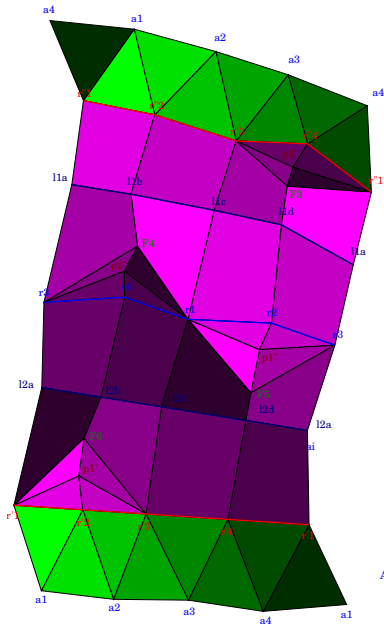


Figure: $f_4 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



Liste des images des points
(lien source-image) :

-- $f(\bar{a}_i) = A$

-- $f(F_1)=f(F_2)=E$

-- $f(F_3)=f(F_4)=f(F_5)=f(F_6)=I$

-- $f(r_i) = f(r_i') = f(r_i'') = R_i$

-- $f(l_{1a}) = f(l_{1b}) = f(l_{1c}) = f(l_{1d}) = f(p_1') = f(p_1'') = P_1$

-- $f(l_{2a}) = f(l_{2b}) = f(l_{2c}) = f(l_{2d}) = f(p_2') = f(p_2'') = P_2$

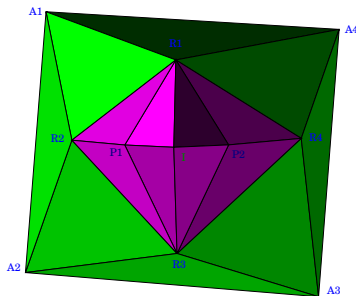


Figure: Quadrilatation de f_4

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Possibilité de représenter les fonctions géométriques par des applications entre objets combinatoires.
- Quatrilation : étend la notion de triangulation et permet de représenter un certain comportement non générique : *les mouvements internes*.
- La classe des triangulations/quatrilations possibles constitue un invariant topologique d'une fonction lisse.

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quatrilation

Conclusions et
perspectives

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Possibilité de représenter les fonctions géométriques par des applications entre objets combinatoires.
- Quatrilation : étend la notion de triangulation et permet de représenter un certain comportement non générique : *les mouvements internes*.
- La classe des triangulations/quatrilations possibles constitue un invariant topologique d'une fonction lisse.

Perspectives

- Automatiser la construction des triangulations (Implémenter la méthode de construction présentée)
- Construire les triangulations de façon garantie
- Canonicité des objets/statut d'invariant (Si la méthode de construction n'implique pas de choix explicite)

Objets
combinatoires et
invariants de
fonctions lisses.
Applications à la
robotique

BENOIT R.,
DELANOUE N.,
LAGRANGE S.,
WENGER P.

Algorithme
applicable à la
robotique

exemple : Robot
manipulateur 3R

Algorithme adapté à
la robotique

Illustration graphique
Conclusions et
compléments

Stratifications et
Triangulations

Limites du contour
apparent

Stratifications

Triangulations

Triangulations de
fonctions
géométriques

Extension des
triangulations :
quatrilation

Conclusions et
perspectives