

Contour apparent d'applications lisses de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 via le calcul par intervalles.

Nicolas Delanoue, Sébastien Lagrange

Université d'Angers
Singular Curves and Surfaces Topology
Méthodes de subdivisions pour les systèmes singuliers.
<https://project.inria.fr/singcast/>

Outline

- 1 Introduction
 - Objets, Equivalence, Invariants
- 2 Applications génériques et leurs singularités en dimension 2
 - Théorème de Whitney
 - Compact simplement connexe à bord
- 3 Calcul par intervalles et applications de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .
- 4 Calcul du contour apparent
- 5 Conclusion - Généralisation
 - Contribution
 - Changer de dimensions - Thom Boardman Theory

Objets

On note \mathcal{C}^∞ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Objets

On note \mathcal{C}^∞ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Equivalence

$f, f' : X \rightarrow Y$ sont équivalentes s'ils existent des difféomorphismes $g : X \rightarrow X$ et $h : Y \rightarrow Y$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

commute.

Objets

On note \mathcal{C}^∞ l'ensemble des fonctions lisses de X dans Y .

Equivalence

$f, f' : X \rightarrow Y$ sont équivalentes s'ils existent des difféomorphismes $g : X \rightarrow X$ et $h : Y \rightarrow Y$ tels que le diagramme

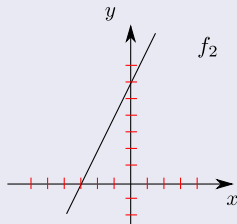
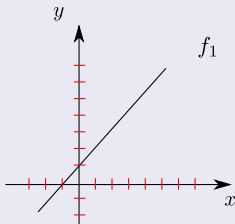
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

commute.

On note \sim cette relation d'équivalence.

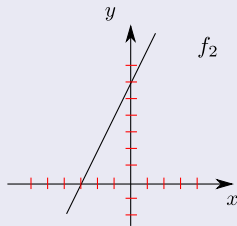
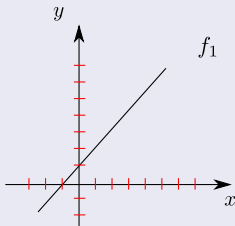
Exemple : $f_1 \sim f_2$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_1(x)=2x+6} & \mathbb{R} \\
 \downarrow g & & \uparrow h \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_2(x)=x+1} & \mathbb{R}
 \end{array}$$



Exemple : $f_1 \sim f_2$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_1(x)=2x+6} & \mathbb{R} \\
 \downarrow x+2 & & \uparrow 2y \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_2(x)=x+1} & \mathbb{R}
 \end{array}$$



Exemple

$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

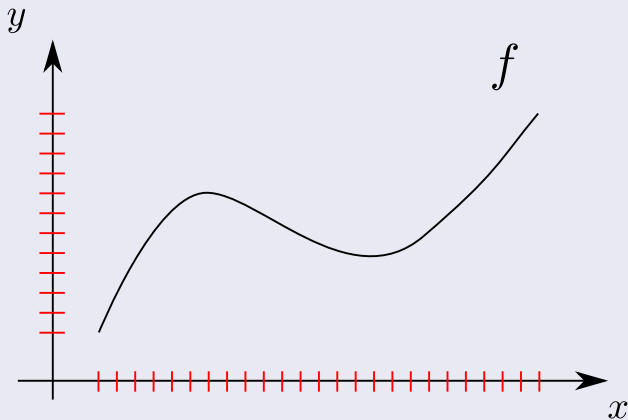
$$f_1 \sim f_2$$

Exemple

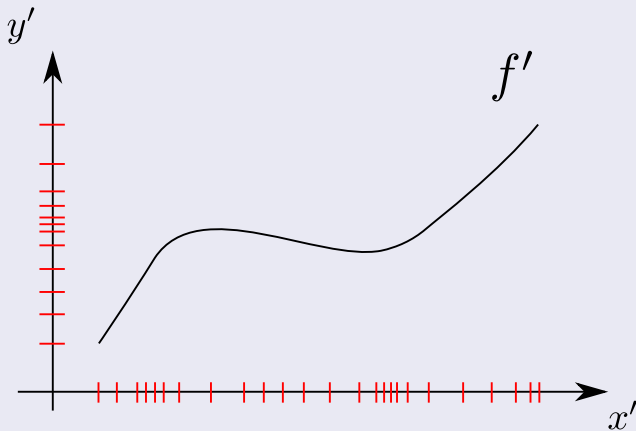
$$f_1(x) = x^2, f_2(x) = x,$$

$$f_1 \not\sim f_2$$

Remarque



Remarque



Proposition

On suppose que $f \sim f'$ avec

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 & \xrightarrow{f} & y_1 \\
 \downarrow g & & \uparrow h \\
 x_2 & \xrightarrow{f'} & y_2
 \end{array}$$

alors $\text{rank } df_{x_1} = \text{rank } df'_{x_2}$.

Preuve

Chain rule, $df = dh \cdot df' \cdot dg$

Définition

Soit S_f l'ensemble des points critiques de f :

$$S_f = \{x \in X \mid df(x) \text{ est singulière.}\}.$$

Corollaire

$$f \sim f' \Rightarrow S_f \simeq S_{f'}$$

où \simeq signifie homéomorphe.

i.e. la **topologie de l'ensemble des points critiques** est un invariant.

Corollaire

$$f \sim f' \Rightarrow f(S_f) \simeq f(S_{f'})$$

i.e. le **contour apparent** est un invariant.

Ce n'est pas un invariant complet,
ils existent des fonctions lisses $f, f' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$

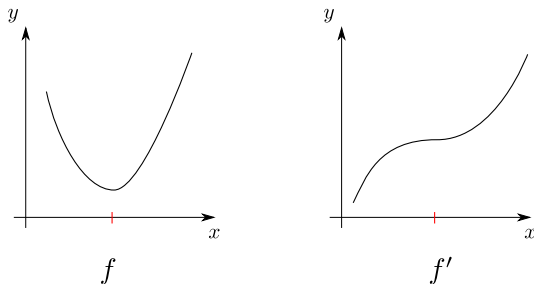


Figure : Singularity theory.

Ce n'est pas un invariant complet,
ils existent des fonctions lisses $f, f' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$

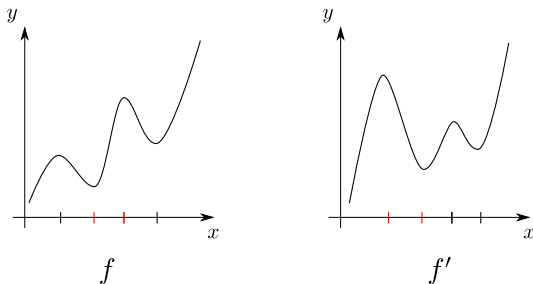


Figure : Topologie de X .

Proposition

Pour chaque partie fermée A de \mathbb{R}^n , il existe une fonction réelle lisse f telle que

$$A = f^{-1}(\{0\})$$

Proposition

Pour chaque partie fermée A de \mathbb{R}^n , il existe une fonction réelle lisse f telle que

$$A = f^{-1}(\{0\})$$

On ne va pas considérer tous les cas ...

Théorème de Whitney [1955]

Soient X et Y deux variétés de dimension 2 et f générique.
 L'ensemble des points critiques S_f est une courbe régulière. Soit
 $p \in S_f$, on a

$$T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X \text{ ou } T_p S_f = \ker df_p$$

Représentations géométriques

① $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X,$

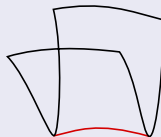
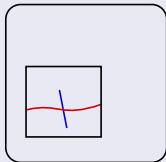


② $T_p S_f = \ker df_p,$

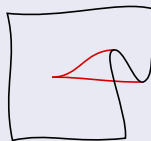
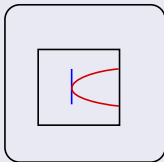


Représentations géométriques

- ① $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$: **point pli**

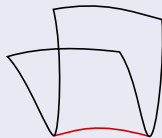
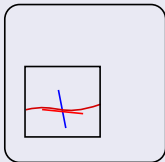


- ② $T_p S_p = \ker df_p$: **point cusp**

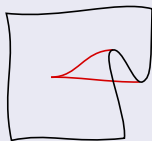
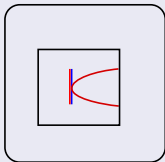


Représentations géométriques

- ① $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$: **point pli**



- ② $T_p S_p = \ker df_p$: **point cusp**

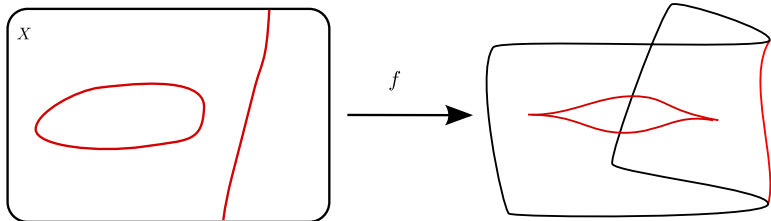


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

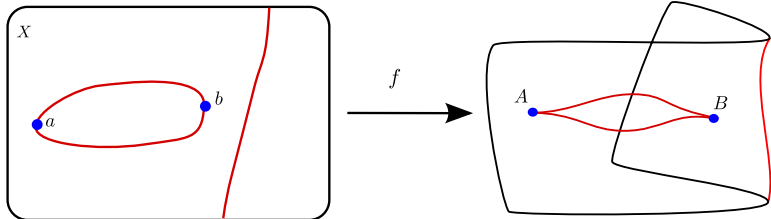


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

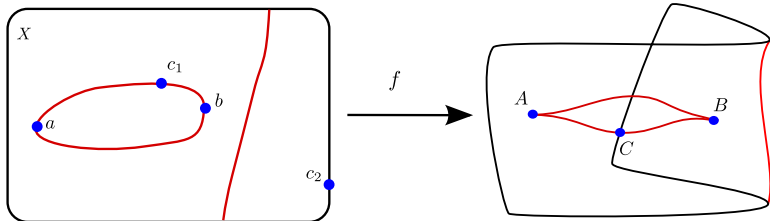


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

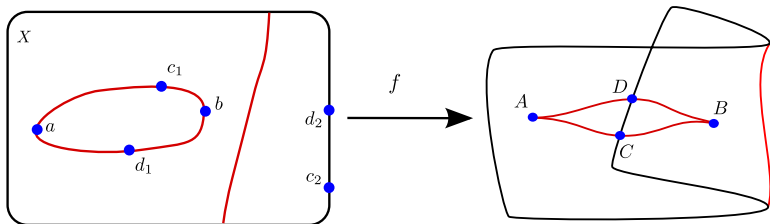


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

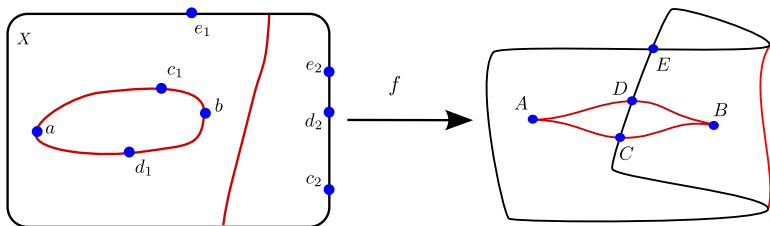


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

La **topologie du contour apparent** est un invariant.

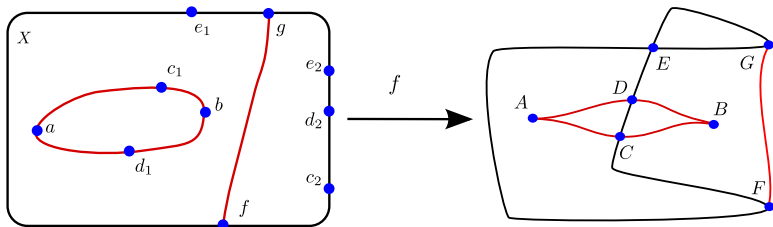


Définition

Soit f une fonction lisse de $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec X un compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 à bord lisse ∂X . Le *contour apparent* de f est

$$f(S_f \cup \partial X)$$

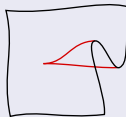
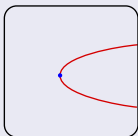
La **topologie du contour apparent** est un invariant.



Théorème - Propriétés globales des applications génériques

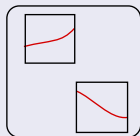
Soient X compact simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Une application générique $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie les propriétés suivantes :

- 1 S est une courbe régulière. De plus, les éléments de S sont des plis ou des cusps. L'ensemble des cusps est discret.



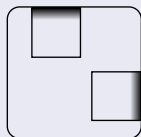
Théorème

- 3 points singuliers n'ont pas la même image,
- 2 points singuliers, ayant la même image, sont des plis et les images des jacobiennes sont différentes.



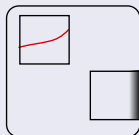
Théorème

- 5 3 points du bords n'ont pas la même image,
- 6 2 points du bords ayant la même image se croisent dans l'image.



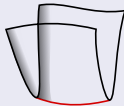
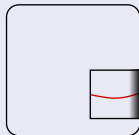
Théorème

- 3 points appartenant $S_f \cup \partial X$ n'ont pas la même image,
- si un point singulier et un point du bord ont la même image, le point singulier est un pli et ils se croisent dans l'image.



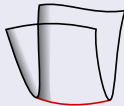
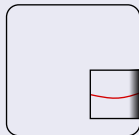
Théorème

- 9 si la courbe singulière intersecte le bord, alors ce point est un pli,
- 10 de plus, les espaces tangents sont différents.



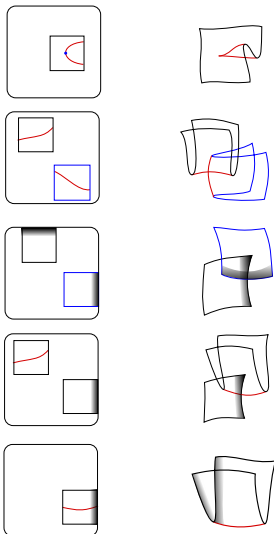
Théorème

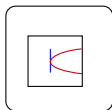
- 9 si la courbe singulière intersecte le bord, alors ce point est un pli,
- 10 de plus, les espaces tangents sont différents.



Preuve

Théorème de transversalité de René Thom et sa généralisation aux multijets par John Mather dans les années 1970.



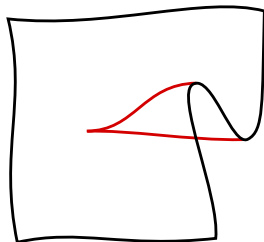
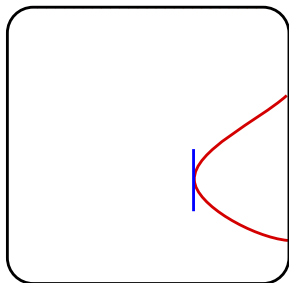


Proposition

Soit f une fonction générique de X dans \mathbb{R}^2 , on définit l'application c par :

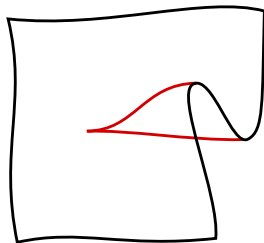
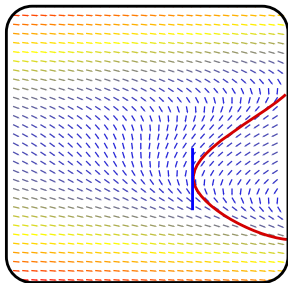
$$\begin{aligned} c : X &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (1)$$

où ξ est un champ de vecteurs défini par $\xi_p = \begin{pmatrix} \partial_2 \det df_p \\ -\partial_1 \det df_p \end{pmatrix}$.
 $c(p) = 0$ et dc_p est inversible si et seulement si p est un cusp.



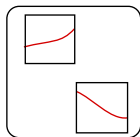
Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned} c &: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (2)$$



Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned} c &: X \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto df_p \xi_p \end{aligned} \quad (3)$$

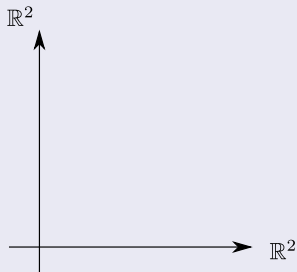


Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{aligned}
 \text{folds} : \quad X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \det df(x_1, y_1) \\ \det df(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

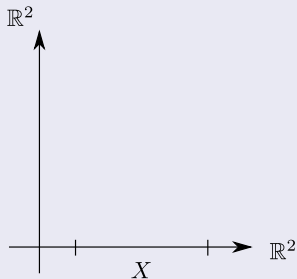
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



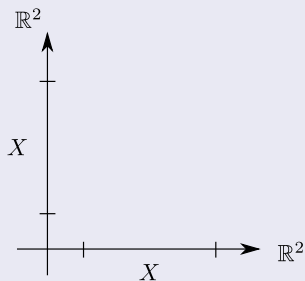
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



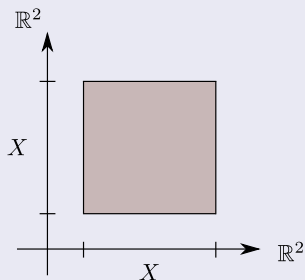
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



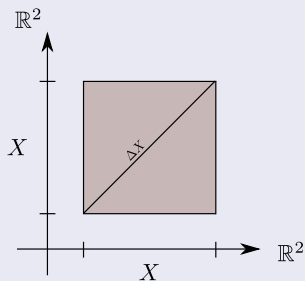
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



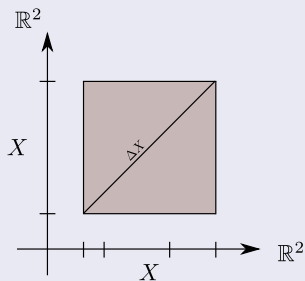
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



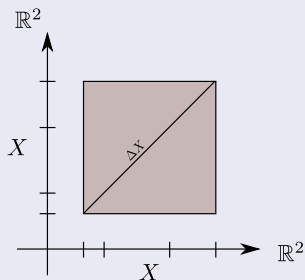
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



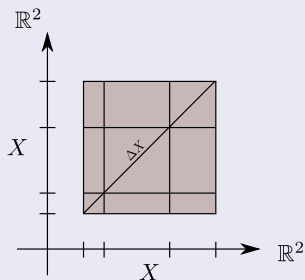
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



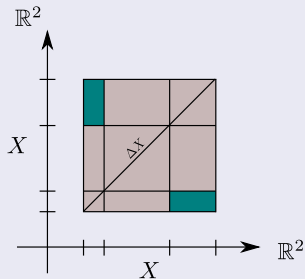
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



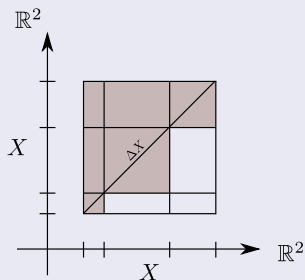
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.



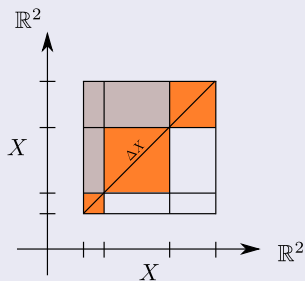
Méthode

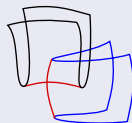
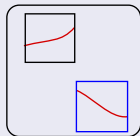
Schéma de bisection sur $X \times X$.



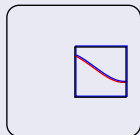
Méthode

Schéma de bisection sur $X \times X$.





$$[x_1] \neq [x_2]$$



$$[x_1] = [x_2]$$

Pour tout (α, α) dans ΔS , $d \text{ folds}$ est conjuguée à

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det df(\alpha) = 0$.

C'est à dire, tout ensemble de la forme $[x_1] \times [x_1]$ contient ΔS , et donc la méthode de Newton par intervalles va échouer.

Pour tout (α, α) dans ΔS , $d \text{ folds}$ est conjuguée à

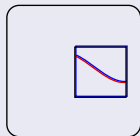
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det df(\alpha) = 0$.

C'est à dire, tout ensemble de la forme $[x_1] \times [x_1]$ contient ΔS , et donc la méthode de Newton par intervalles va échouer.

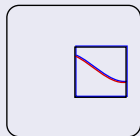
On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.

On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.



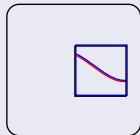
$$[x_1] = [x_2]$$

On a besoin d'une méthode qui prouve $f|_{S \cap [x_1]}$ est injective.



$$[x_1] = [x_2]$$

Pas dans ce cas ...



Definition

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable et soit X un ouvert de \mathbb{R}^n . On note par $\tilde{df}(X)$ le sous-ensemble de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ définie par

$$\tilde{df}_X = \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \partial_j f_1(\xi_1) dx_j, \dots, \sum_{j=1}^n \partial_j f_p(\xi_p) dx_j \right) \mid \xi_1, \dots, \xi_p \in X \right\}$$

On remarque que $df_X = \{df_x \mid x \in X\}$ est un sous ensemble de \tilde{df}_X .

Lemme - Fonction injective

Soit X un compact convexe de \mathbb{R}^n et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application lisse $n \leq p$. Si $\forall J \in \tilde{df}(X)$, J est injective alors f est injective.

Corollaire

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application lisse et X un compact de \mathbb{R}^2 . Soit $\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion telle que la courbe $S = \{x \in X \mid \Gamma(x) = 0\}$ est contractile.

Si

$$\forall J \in \tilde{d}f(X) \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 \Gamma(X) \\ -\partial_1 \Gamma(X) \end{pmatrix}, \text{rank } J = 1$$

alors $f|_S$ est une injection.

La dernière condition n'est pas satisfaite si X contient un cusp ...

Proposition

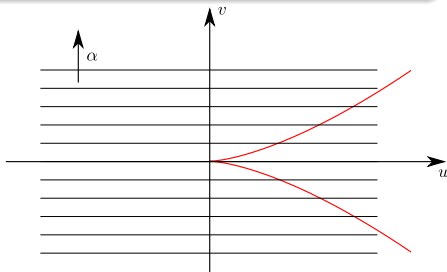
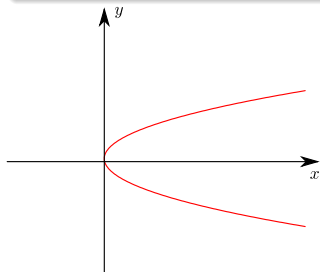
Supposons qu'il existe un unique cusp p_0 dans l'intérieur de X . Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{2*}$, tel que $\alpha \cdot \text{Im } df_{p_0} = 0$, et ξ est un champ de vecteurs toujours non nul vérifiant $\forall p \in S, \xi_p \in T_p S$ (S contractible). Si la fonction $g = \sum \alpha_i \xi^3 f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas alors $f|_S$ est une injection. (Cette condition est localement nécessaire).

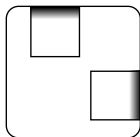
Ici le champ de vecteurs ξ est vu comme une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(X)$ définie par

$$\xi = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Proposition

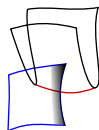
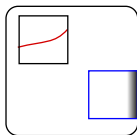
Supposons qu'il existe un unique cusp p_0 dans l'intérieur de X .
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{2*}$, tel que $\alpha \cdot \text{Im } df_{p_0} = 0$, et ξ est un champ de vecteurs toujours non nul vérifiant $\forall p \in S, \xi_p \in T_p S$ (S contractible).
Si la fonction $g = \sum \alpha_i \xi^3 f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas alors $f|_S$ est une injection.





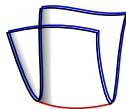
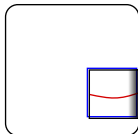
Méthode de Newton par intervalles

$$\begin{array}{l}
 \text{boundaries} : \quad X \times X \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{c} \Gamma(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{array} \right)
 \end{array}$$



Méthode de Newton par intervalles, $[x_1] \neq [x_2]$

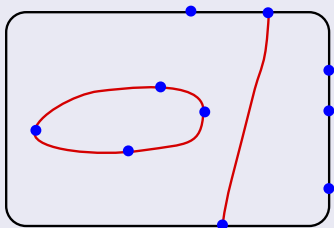
$$\begin{array}{ccc}
 X \times X & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\
 \left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right) & \mapsto & \left(\begin{array}{c} \det df(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_2, y_2) \\ f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2) \end{array} \right)
 \end{array}$$



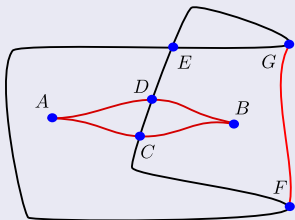
Méthode de Newton par intervalles, $[x_1] = [x_2]$

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \det df(x_1, y_1) \\ \Gamma(x_1, y_1) \end{pmatrix} \end{array}$$

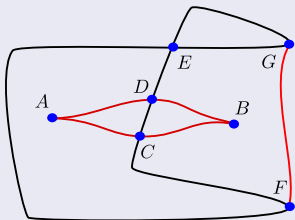
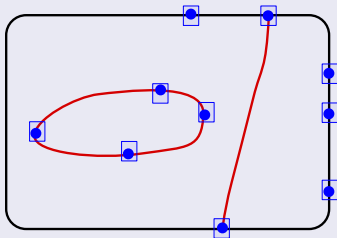
Analyse



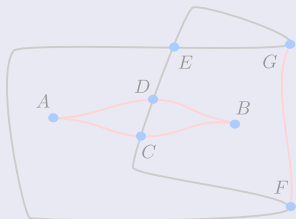
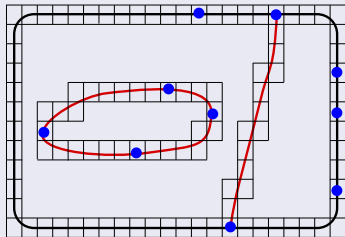
f



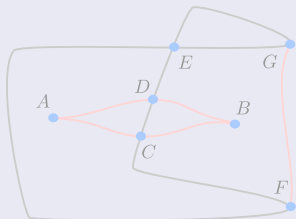
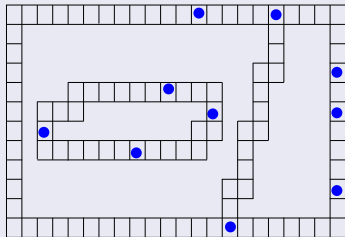
Analyse



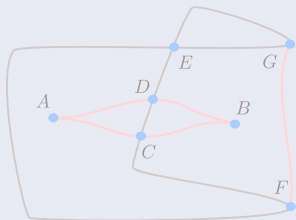
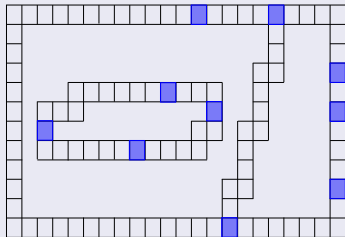
Analyse



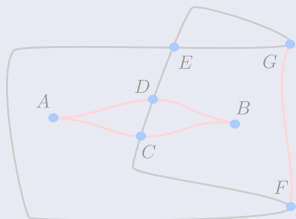
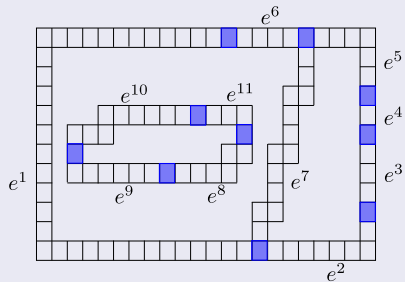
Analyse



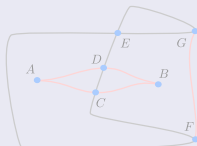
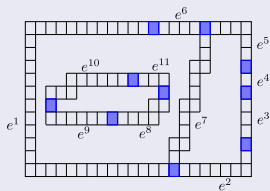
Analyse



Analyse

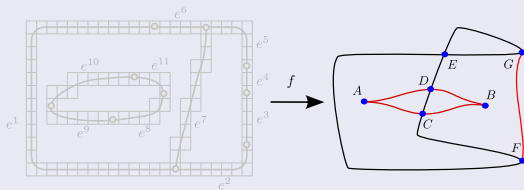


Synthèse



$$\mathcal{X} = \begin{matrix} & e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

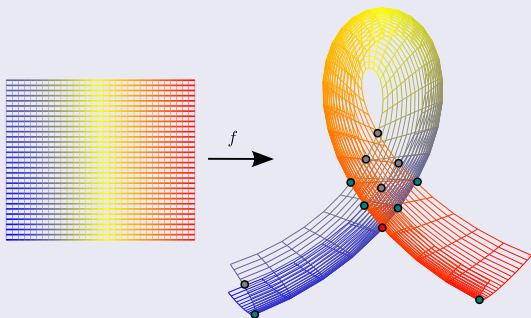
Synthèse



$$\mathcal{X}/f = \begin{matrix} & e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Exemple numérique - Solver Thom

$$f : [-1, 4] \times [-0.4, 0.6] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.5x + (1 - y^2) \cos(x + 0.2y) \\ (1 - y^2) \sin(x) \end{pmatrix}$$



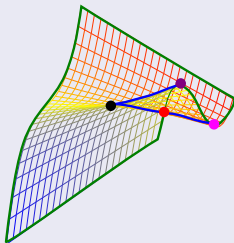
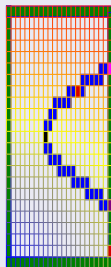
- ① the number of cusp points is exactly 0,
- ② the number of transversal intersection of fold curves in the target is exactly 1,
- ③ the number of transversal intersection of boundary curves in the target is exactly 5,
- ④ the number of intersection fold curves with boundary is exactly 6.

The topology of the Apparent Contour is the following :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple numérique

$$f : [-0.2, 0.33] \times [-0.7, 0.61] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 0.2y \\ y^3 - xy \end{pmatrix}$$



Temps de calcul : 2 secondes

Notre contribution

Calcul d'un invariant : la topologie du contour apparent pour une fonction lisse dans le cas générique.

Début de le thèse de Romain BENOIT

- Appliquer ces méthodes à des problèmes issus de la robotique,
- Monter en dimension,
- Calculer des invariants plus riches (via des objets combinatoires).

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on note par $S_r(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x \text{ chute de } r\}$

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on note par $S_r(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x \text{ chute de } r\}$

Proposition

On a

$$S_f = \bigcup_{r \geq 1} S_r$$

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on note par $S_r(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x \text{ chute de } r\}$

Proposition

On a

$$S_f = \bigcup_{r \geq 1} S_r$$

Dans le cas $\dim X = \dim Y = 2$

On a génériquement $S_f = S_1$, en effet $S_2 = \emptyset$.

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on considère $f^r = f|_{S_r}$, on note par

$$S_{r,i}(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x^r \text{ chute de } i \}$$

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on considère $f^r = f|_{S_r}$, on note par

$$S_{r,i}(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x^r \text{ chute de } i \}$$

Proposition

On a

$$S_r = \bigcup_{i \geq 0} S_{r,i}$$

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$, on considère $f^r = f|_{S_r}$, on note par

$$S_{r,i}(f) = \{x \in X \mid \text{rank } df_x^r \text{ chute de } i \}$$

Proposition

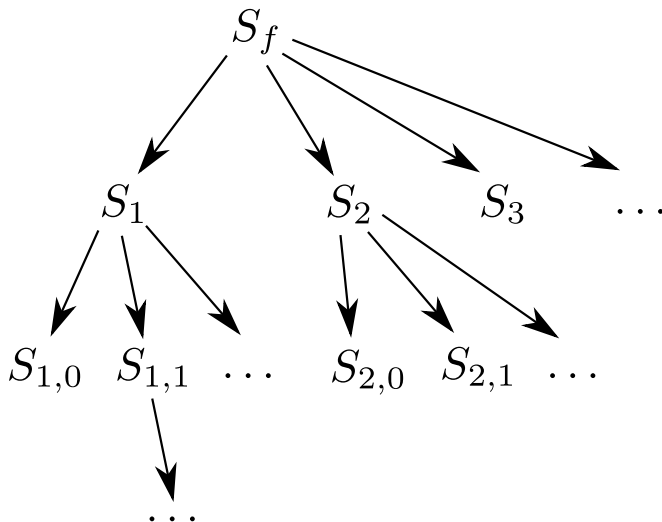
On a

$$S_r = \bigcup_{i \geq 0} S_{r,i}$$

Dans le cas $\dim X = \dim Y = 2$

On a génériquement :

- 1 $S_{1,0}$ est l'ensemble des points plis,
- 2 $S_{1,1}$ est l'ensemble des points cusps.





Merci pour votre attention.